



Структура электрона в теории Калуцы-Клейна

Electron structure in Kaluza-Klein theory

Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)

Alexander P. Trunev

На основе теории Калуцы-Клейна изучены особые состояния атома водорода, возникающие при взаимодействии протона со скалярным безмассовым полем.

The special states of a hydrogen atom, arising from the interaction of a proton with a scalar massless field studied on the basis of Kaluza-Klein theory

Ключевые слова: Теория Калуцы-Клейна, Атом водорода, квантовая механика, электрон.

Keywords: KALUZA-KLEIN THEORY, Hydrogen atom, Quantum Mechanics, Electron.

Введение

Поиски метрики, описывающей заряженные частицы продолжаются уже более 100 лет. Отметим раннюю работу Эйнштейна /1/, метрику Калуцы /2/, метрику Рейснера-Нордстрема-де Ситтера /3/, метрику Керра-Ньюмана /4/, метрику Джунушалиева /5/ и модели геонов /6/.

Эйнштейн /1/ исследовал равновесие заряда под действием сил гравитации и электромагнитных сил в рамках ОТО и уравнений Максвелла в четырехмерном пространстве. Калуца /2/ выдвинул смелую гипотезу, что гравитацию Эйнштейна и электродинамику Максвелла можно объединить в рамках одной метрической теории гравитации в пятимерном пространстве. Эта идея привела к созданию многочисленных моделей, в которых структура элементарных частиц рассматривается в рамках теории Калуцы-Клейна в метрике Джунушалиева /5/ в пятимерном пространстве. С другой стороны, можно показать, что электрон Дирака имеет внутреннюю структуру, которая описывается метрикой Керра-Ньюмана в четырехмерном пространстве /4/.

Отдельного внимания заслуживает вопрос о структуре электрона в составе атома в теории Калуцы-Клейна. Было установлено /7/, что влияние электромагнитного поля на метрику в пятимерном пространстве приводит к изменению спектра масс элементарных

частиц. В настоящей работе в рамках модели /7/ дано решение задачи об энергетическом спектре особых состояний атома водорода с аксиальной симметрией.

Описание модели

Следуя /7/, предположим, что вблизи массивного центра гравитации метрический тензор в 5-мерном пространстве представляется в виде ряда по степеням расстояния до источника, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, следовательно

$$G_{ik} = G_{ik}(0) + \dot{G}_{ik}(0)kr + \ddot{G}_{ik}(0)\frac{(kr)^2}{2} + \dots \quad (1)$$

Здесь параметром k задается масштаб области применения модели (1), а точкой обозначено дифференцирование по безразмерному параметру $\tilde{r} = kr$. Рассмотрим вид тензора (1), возникающего при удержании первых трех членов разложения для случая метрики в поле центральных сил с гравитационным потенциалом в форме Ньютона.

Положим $x^1 = ct, x^2 = x, x^3 = y, x^4 = z$, в этих обозначениях имеем для квадрата интервала в 4-мерном пространстве:

$$ds^2 = (1 + 2\varphi/c^2)c^2t^2 - (1 - 2\varphi/c^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ \varphi = -\frac{\gamma M}{r} \quad (2)$$

Здесь γ - гравитационная постоянная, M - масса центрального тела, c - скорость света. Предположим, что коэффициенты метрики в 5-мерном пространстве характеризуется некоторым параметром $\varepsilon^2 = G_{11}(0) = -\dot{G}_{11}(0)$. Тогда, полагая, что $\varepsilon^2/k = 2\gamma M/c^2$, приходим к выражению интервала в зависимости от параметров метрики в 5-мерном пространстве:

$$ds^2 = (1 - \varepsilon^2/kr)c^2t^2 - (1 + \varepsilon^2/kr)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3)$$

Далее заметим, что в этом случае метрический тензор в четырехмерном пространстве является диагональным с компонентами

$$g_{11} = 1 - \varepsilon^2/kr; \quad g_{22} = g_{33} = g_{44} = -(1 + \varepsilon^2/kr) \quad (4)$$

Зададим векторный потенциал источника, связанного с центром гравитации в виде

$$g_1 = \varepsilon/kr, \quad \mathbf{g} = g_1 \mathbf{u} \quad (5)$$

Здесь \mathbf{u} - некоторый вектор в трехмерном пространстве, который определим ниже. Отсюда находим скалярный и векторный потенциал электромагнитного поля

$$\varphi_e = \frac{q}{r} = \frac{mc^2}{e} \frac{\varepsilon}{kr}, \quad \mathbf{A} = \varphi_e \mathbf{u} \quad (6)$$

Полагая $N=(kr)^2$ и вычисляя метрический тензор в 5-мерном пространстве, с учетом (4)-(5), находим, что в этом случае выражение (1) содержит в правой части только три члена ряда разложения по степеням параметра $\tilde{r} = kr$

$$G_{ik} = \begin{pmatrix} Ng_{ik} + Ng_i g_k & Ng_k \\ Ng_i & N \end{pmatrix} = G_{ik}(0) + \dot{G}_{ik}(0)(kr) + \ddot{G}_{ik}(0) \frac{(kr)^2}{2} \quad (7)$$

Отметим, что нулевой член разложения (7), описывающий плоское пространство, зависит от наличия заряда. В метрике (7) всякое массивное тело может иметь

положительный или отрицательный электрический заряд $q = \pm mc \sqrt{2\gamma M / k} / e$.

Поскольку же заряд квантуется, можно определить массу, порождающую электрон или протон, из соотношений: $q=e$, $M=m$, следовательно, $m^3 = ke^4 / 2c^2 \gamma$. Отсюда находим выражение неизвестного параметра теории

$$k = 2\gamma m^3 c^2 / e^4 \quad (8)$$

Заметим, что это выражение соответствует закону Кулона в форме (6) в Гауссовой системе единиц. В системе СИ правую часть (8) следует умножить на $(4\pi\epsilon_0)^2$, где ϵ_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума. Численное значение параметра (8), имеющего размерность обратной длины, составляет в случае электрона около $1,7 \cdot 10^{-28} \text{ м}^{-1}$, а в случае протона приблизительно $1,05 \cdot 10^{-18} \text{ м}^{-1}$. Отметим, что соответствующий масштаб в случае электрона превосходит размер наблюдаемой Вселенной, тогда как для протонов этот масштаб составляет около 100 световых лет.

Этот результат показывает, что для описания движения в четырехмерных мирах с учетом сил гравитации и электромагнетизма требуется лишь конечное число членов ряда (1) в разложении метрического тензора в 5-мерном пространстве.

Рассмотрим вопрос о нижнем пределе применимости развиваемой модели. Для этого сравним нулевой и второй члены разложения (7). Предполагая, что эти слагаемые имеют один порядок, $(kr)^2 \approx \epsilon^2$, находим соответствующий минимальный радиус, $r_{\min} \approx \epsilon / k = e^2 / mc^2$, который в случае электрона совпадает с его классическим радиусом – таблица 1. На этом масштабе электростатическое поле существенно влияет на метрику 5-мерного пространства, как буде показано ниже. Отметим, что минимальный размер в случае протона совпадает с радиусом действия слабого взаимодействия.

Таблица 1. Параметры разложения метрического тензора G_{ik}

	$k, 1/\text{м}$	ϵ	$r_{\max}, \text{М}$	$r_{\min}, \text{М}$
e-	1,703163E-28	4,799488E-43	5,87E+27	2,81799E-15
p+	1,054395E-18	1,618178E-36	9,48E+17	1,5347E-18

Чтобы вычислить контравариантный тензор G^{ik} , используем общее выражение в форме /7/

$$G^{ik} = N^{-1} \begin{pmatrix} g^{ik} & -g^k \\ -g^i & 1 + g^{ik} g_i g_k \end{pmatrix} \quad (9)$$

Вычисляя контравариантные компоненты четырехмерного метрического тензора и векторного потенциала, согласно (5), находим, что

$$\begin{aligned} g^{11} = a = (1 - \varepsilon^2 / kr)^{-1}; \quad g^{22} = g^{33} = g^{44} = b = -(1 + \varepsilon^2 / kr)^{-1} \\ g^1 = ag_1, \quad g^2 = bg_2, \quad g^3 = bg_3, \quad g^4 = bg_4 \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда, вычисляя контравариантный тензор G^{ik} по уравнению (9), получим

$$G^{ik} = N^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -g^1 \\ 0 & b & 0 & 0 & -g^2 \\ 0 & 0 & b & 0 & -g^3 \\ 0 & 0 & 0 & b & -g^4 \\ -g^1 & -g^2 & -g^3 & -g^4 & \lambda \end{pmatrix} \quad (11)$$

Здесь обозначено $\lambda = 1 + ag_1^2 + b(g_2^2 + g_3^2 + g_4^2)$. Отметим, что контравариантные компоненты векторного потенциала и метрического тензора в 4-х и 5-мерном пространстве, пропорциональные параметру a , имеют особенность в точке $r = \varepsilon^2 / k = 2\gamma M / c^2$, что соответствует гравитационному радиусу. Определитель метрического тензора равен обратной величине определителя контравариантного тензора G^{ik} , который легко вычисляется для матрицы (11), имеем в результате (см. /7/)

$$G = N^5 a^{-1} b^{-3} \quad (12)$$

Для описания движения материи с учетом ее волновых свойств, предположим, что стандартное уравнение Гамильтона-Якоби в релятивистской механике и уравнение типа Клейна-Гордона в квантовой механике возникают как следствие выполнения волнового уравнения в 5-мерном пространстве /7/. Это уравнение в общем случае можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-G} G^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) = 0 \quad (13)$$

Здесь Ψ - волновая функция, описывающая, согласно (13), безмассовое скалярное поле в пятимерном пространстве.

Уравнение (13) интересно тем, что из него, путем простого обобщения, можно вывести все основные модели квантовой механики, включая уравнение Дирака, а в нерелятивистском случае это уравнение сводится к уравнению Шредингера. Из него

можно также вывести уравнение эйконала, которое в 4-х мерном пространстве сводится к уравнению Гамильтона-Якоби, описывающему движение релятивистских заряженных частиц в электромагнитном и гравитационном поле /7/.

Далее заметим, что в исследуемой метрике, зависящей только от радиальной координаты, выполняется следующее соотношение

$$F^\mu = N \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-GG^{\mu\nu}}) = N \frac{\partial r}{\partial x^\mu} \frac{d}{dr} (\sqrt{-GG^{\mu\nu}}) \quad (14)$$

С учетом выражений (10), (14) запишем волновое уравнение (13) в виде

$$\frac{a}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - |b| \nabla^2 \Psi + \lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - 2g^i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial \rho} + F^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = 0 \quad (15)$$

Отметим, что последнее слагаемое в уравнении (15) имеет порядок $N^2 k = k^5 r^4 \ll 1$. Следовательно, это слагаемое можно отбросить в задачах, характерный масштаб которых значительно меньше, чем максимальный масштаб из таблицы 1. Уравнение (15) примечательно тем, что оно не содержит каких-либо параметров, характеризующих скалярное поле. Поле приобретает массу и заряд (не только электрический, но и сильный, и слабый /7/) в процессе взаимодействия с центральным телом, что обусловлено только метрикой 5-и мерного пространства.

Спектр атомных частиц с аксиальной симметрией

Рассмотрим задачу о движении материи вокруг заряженного центра гравитации, обладающего электрическим и сильным зарядом, например, вокруг протона. В процессе решения этой задачи необходимо определить инерционную массу материи и энергию связи. Поскольку уравнение (15) является линейным и однородным, такую задачу можно решить в общем случае.

Введем полярную систему координат (r, ϕ, z) с осью z направленной вдоль векторного потенциала (6), положим в уравнении (15)

$$\Psi = \psi(r) \exp(i l \phi + i k_z z - i \omega t - i k_\rho \rho) \quad (16)$$

Разделяя переменные, находим, что радиальное распределение материи описывается следующим уравнением (здесь отброшено, в силу его малости, последнее слагаемое в уравнении (15)):

$$-\frac{a\omega^2}{c^2} \psi - |b| \left(\psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r - \frac{l^2}{r^2} \psi - k_z^2 \psi \right) - \lambda k_\rho^2 \psi + 2g^1 c^{-1} \omega k_\rho \psi - 2g^z k_z k_\rho \psi = 0 \quad (17)$$

Будем считать, что характерный масштаб пространственного распределения материи значительно превосходит гравитационный радиус, $r \gg \varepsilon^2/k = 2\gamma M/c^2$. Тогда в

первом приближении можно положить, что $a \approx -b \approx 1$; $\lambda = 1 + g_1^2 - g^2 \approx 1$. Используем также определение векторного и скалярного потенциала (5), в результате получим

$$\psi_{rr} + \frac{1}{r}\psi_r - \frac{l^2}{r^2}\psi - k_z^2\psi + \left(K^2 + \frac{\kappa_g}{r}\right)\psi = 0 \quad (18)$$

$$K^2 = k_\rho^2 + \omega^2/c^2, \quad \kappa_g = -2\epsilon k_\rho (k_z u_z + \omega/c)/k > 0$$

Отметим, что уравнение (18) по форме совпадает с тем, что было получено в работе /8/ в случае аксиально симметричных решений уравнений Шредингера, описывающих особые состояния атома водорода. Будем искать решение уравнения (18) в виде

$$\psi = \frac{\chi(r)}{r^{1/2}} \quad (19)$$

Подставляя выражение (19) в уравнение (18), находим

$$\chi'' - \frac{L^2}{r^2}\chi - k_z^2\chi + \left(K^2 + \frac{\kappa_g}{r}\right)\chi = 0 \quad (20)$$

Здесь $L^2 = l^2 - 1/4$.

Предположим, что скалярное поле концентрируется вокруг замкнутой круговой орбиты, совпадающую с классической траекторией частицы с заданной массой, зарядом и орбитальным моментом. Введем новую переменную, описывающую отклонение от классической траектории согласно $r = R + \xi$. В этих обозначениях уравнение (20) имеет вид

$$\chi'' - \frac{L^2}{(R + \xi)^2}\chi - k_z^2\chi + \left(K^2 + \frac{\kappa_g}{R + \xi}\right)\chi = 0 \quad (21)$$

Будем считать, что скалярное поле сосредоточено вокруг классической траектории, что равносильно условию $\xi/R \ll 1$. Разложим коэффициент у слагаемых в уравнении (21) по степеням малого параметра ξ/R . Удерживая только линейные и квадратичные слагаемые, находим

$$\chi'' - \frac{L^2}{R^2}\chi + \frac{L^2}{R^3}2\xi\chi - \frac{L^2}{R^4}3\xi^2\chi - k_z^2\chi + \left(K^2 + \frac{\kappa_g}{R} - \frac{\kappa_g}{R^2}\xi + \frac{\kappa_g}{R^3}\xi^2 \right)\chi = 0 \quad (22)$$

Будем предполагать, что равновесная классическая траектория удовлетворяет уравнению

$$\frac{L^2}{R^3}2\xi - \frac{\kappa_g}{R^2}\xi = 0 \quad (23)$$

С учетом (23) уравнение (22) принимает вид, как в модели квантового гармонического осциллятора /8/

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\chi'' + \frac{m\omega_0^2}{2}\xi^2\chi = \tilde{E}\chi, \quad \omega_0^2 = \frac{\hbar^2 L^2}{m^2 R^4} \quad (24)$$

$$\tilde{E} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \kappa_g}{2mR} - \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{L^2}{R^2} + k_z^2 \right)$$

Отметим, что первое уравнение (24) следует из уравнение (22), если умножить все части этого уравнения на постоянный множитель $\hbar^2/2m$, что сделано исключительно для демонстрации аналогии с квантовой механикой Шредингера. Как известно, решением уравнения (24) является функция

$$\chi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{L}{\pi R^2} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{L\xi^2}{2R^2}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{L}\xi}{R}\right) \quad (25)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Заметим, что решение (25) действительно описывает распределение скалярной плотности, сосредоточенное в окрестности равновесной траектории, что согласуется с исходным предположением $\xi/R \ll 1$. Причем это предположение выполняется тем лучше, чем большее значение имеет орбитальный момент.

Используя спектр значений энергии квантового гармонического осциллятора и второе уравнение (24), находим с учетом (23)

$$E = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\kappa_g^2}{4L^2} + \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \quad (26)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (12) описывает эффект, обусловленный притяжением центрального ядра, т.е. энергию связи. Второе слагаемое описывает квантовый эффект, связанный с ограниченным движением относительно классической траектории. Третье слагаемое описывает эффект, связанный с движением системы как целое вдоль оси симметрии.

В случае атома водорода следует считать, что L – целое число, кроме того потребуем точного совпадения уравнения (26) и аналогичного уравнения из работы [8], описывающего уровни энергии особых состояний атома водорода в модели Шредингера, т.е.

$$E = -\frac{\alpha^2 m_e c^2}{2L^2} + \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} \quad (27)$$

Здесь введена постоянная тонкой структуры $\alpha = 1/137,035999679$.

Отсюда, путем сравнения соответствующих слагаемых в правой части выражений (26) и (27), находим, что параметры задачи связаны следующим соотношением

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\kappa_g^2}{2} = \frac{\hbar^2 \varepsilon^2}{m k^2} k_\rho^2 (k_z u_z + \omega / c)^2 = \alpha^2 m_e c^2$$

Это соотношение можно также переписать в виде, содержащем, с одной стороны, константы атомной физики, а, с другой стороны, параметры метрики и скалярного поля:

$$\frac{\varepsilon^2}{k^2} k_\rho^2 (k_z u_z + \omega / c)^2 = \frac{m}{\hbar^2} \alpha^2 m_e c^2 \quad (28)$$

Следует заметить, что исходная метрика в пятимерном пространстве определяется метрическим тензором (7), который зависит только от параметров центрального тела, т.е. от заряда и массы протона, поэтому в левой части уравнения (27) следует положить $\varepsilon / k = e^2 / m_p c^2$.

Подставляя эти значения в уравнение (28), находим

$$(k_z u_z + \omega / c)^2 = \frac{m_p^2 c^2}{\hbar^2} \frac{m m_e c^2}{\hbar^2 k_\rho^2} \quad (29)$$

Отметим, что уравнение для собственных частот осцилляторов, которое получается путем сопоставления вторых членов в правых частях уравнений (26) и (27) соответственно, не является линейно независимым, т.е. сводится к (28). Действительно, из определения частоты (24) и уравнения (23) находим

$$\hbar \omega_0 = \frac{\hbar^2 L}{m R^2} = \frac{\hbar^2 k_g^2}{4 m L^3} \quad (30)$$

С другой стороны, из аналогичных уравнений работы /8/ следует, что

$$\hbar \omega_0 = \frac{\hbar^2 L}{m R^2} = \frac{\alpha^2 m_e c^2}{L^3} \quad (31)$$

Приравняв собственные частоты осцилляторов, согласно (30) и (31), вновь приходим к уравнению (28), что и требовалось доказать.

Используя уравнения (28) и (30), можно получить уравнение для определения частоты колебаний и волнового вектора, которое следует из уравнения (26). Учитывая определение параметра К, получим

$$k_\rho^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = - \frac{\alpha^2 m_e^2 c^2}{\hbar^2 L^2} \left(1 - \frac{2n+1}{L} \right) + k_z^2 \quad (32)$$

Поскольку волновой вектор k_z является произвольным, а частота должна удовлетворять, как уравнению (31), так и уравнению (29), необходимо предположить, что это достигается за счет выбора параметра k_ρ . Выражая этот параметр из уравнения (29) и подставляя его в уравнение (31), находим окончательно

$$\frac{m_p^2 c^2}{\hbar^2} \frac{m m_e c^2}{\hbar^2} \left(k_z u_z + \frac{\omega}{c} \right)^{-2} + \frac{\omega^2}{c^2} = - \frac{\alpha^2 m_e^2 c^2}{\hbar^2 L^2} \left(1 - \frac{2n+1}{L} \right) + k_z^2 \quad (33)$$

Отсюда следует, что для всех состояний с угловым моментом $L = 2n + 1$ система протон+скалярное поле распространяется как свободная волна с дисперсионным соотношением

$$\frac{m_p^2 c^2}{\hbar^2} \frac{m m_e c^2}{\hbar^2} = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(k_z u_z + \frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (34)$$

Наиболее простой результат получается при отсутствии магнитного взаимодействия, т.е. при $u_z = 0$. В этом случае находим из уравнения (34)

$$\frac{\omega}{c} = \pm \sqrt{\frac{k_z^2}{2}} \pm \sqrt{\frac{k_z^4}{4} - \frac{m_p^2 m m_e c^4}{\hbar^4}} \quad (35)$$

Откуда следует, что скалярное поле имеет граничную частоту, которая определяется из (35) как

$$\omega_e = \omega \Big|_{k_z = k_e} = \pm \frac{c^2 \sqrt{m_p \sqrt{m m_e}}}{\hbar}, \quad k_e = \pm \frac{2c \sqrt{m_p \sqrt{m m_e}}}{\hbar} \quad (36)$$

Наконец, предполагая, что нижняя граничная частота соответствует массе электрона, находим неизвестный масштаб массы, введенный в модели осциллятора (24)

$$m = m_e^3 / m_p^2 \approx 2,96285 \cdot 10^{-7} m_e \quad (37)$$

Энергия покоя mc^2 составляет около 0,151319 эВ, что соответствует температуре около 1756К.

Таким образом, мы показали, что в пятимерном пространстве с метрикой (7) скалярное безмассовое поле, не обладающее электрическим зарядом, может сформировать вокруг протона распределение материи по своим свойствам похожее в четырехмерном пространстве на атом водорода в особом состоянии /8/. В настоящей работе мы рассмотрели осесимметричные решения уравнения (15), с целью показать их идентичность аналогичным результатам из работы /8/, полученным в квантовой механике Шредингера.

Особо следует подчеркнуть, что сопоставление двух моделей – квантовой механики Шредингера и уравнения (15), выполнено без обычного предположения о малой скорости движения электрона по сравнению со скоростью света, что недопустимо в данной модели. Вместо этого использовано предположение о том, что граничная частота (36) колебаний скалярного поля соответствует массе электрона. Это позволяет определить масштаб массы (37) и замкнуть модель.

Рассмотрим радиальное распределение плотности материи в цилиндрическом слое

$$Q(r) = r\psi^2 \quad (38)$$

Заметим, что при таком определении мы исключили сингулярность функции (19). Распределение плотности материи скалярного поля вокруг протона, которое задается функциями (16), (19), (25) и (38), похоже на тор с центром в протоне, движущийся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью – рис. 1. Такого рода конфигурации атомов и молекул рассматривались многими авторами, а также подтверждены экспериментально /9/.

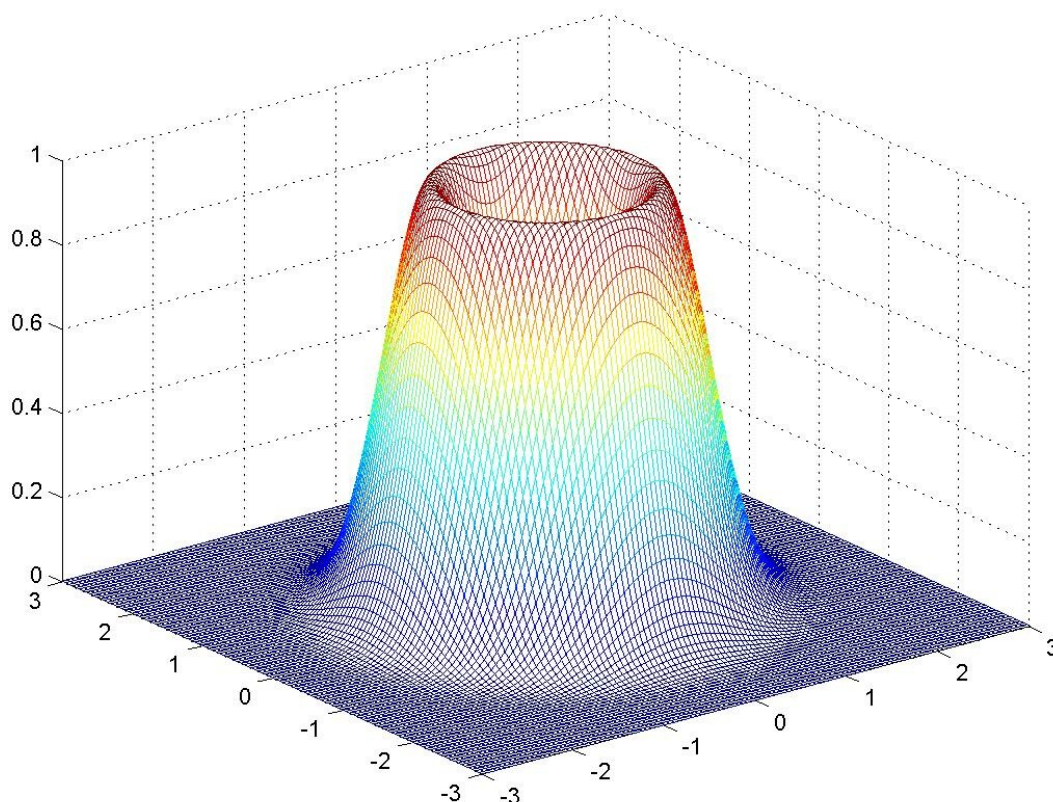


Рис. 1. Распределение плотности материи в тороидальном атоме водорода при $l=3$.

В настоящей работе показано, что тороидальный атом возникает при взаимодействии протона с безмассовым скалярным полем в пятимерном пространстве с метрикой (7), которая описывает в четырехмерном пространстве гравитацию Ньютона и электромагнитные потенциалы (5), имеющие связь с метрикой Керра-Ньюмана /4/. Представляет также интерес описание особых состояний атома водорода на основе метрики Джунушалиева /5/, которая содержит скалярное поле в качестве параметра.

Наконец, заметим, что развитая модель с небольшими изменениями может быть использована для описания структуры нейтрона, чему будет посвящена наша следующая работа.

1. Альберт Эйнштейн. Играют ли гравитационные поля существенную роль в построении элементарных частиц?/ Собрание научных трудов в четырех томах. Т.1. – М., Наука, 1965.
2. Kaluza, Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik. [Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. \(Math. Phys.\) 1921](#): 966–972.
3. K. Lake. Reissner-Nordstrom-de Sitter metric, the third law, and cosmic censorship// Phys. Rev. D 19, 421 (1979) .
4. Alexander Burinskii. Kerr Geometry as Space-Time Structure of the Dirac Electron//arXiv:0712.0577v1 [hep-th], 4 Dec 2007
5. [V. Dzhunushaliev](#). Wormhole solutions in 5D Kaluza-Klein theory as string-like objects// [arXiv:gr-qc/0405017v1](#)
6. Jorma Louko, Robert B. Mann, Donald Marolf. Geons with spin and charge // [http://arxiv.org/abs/gr-qc/0412012v2](#)
7. Трунев А.П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы-Клейна// Научный журнал КубГАУ. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №07(71). С. 502 – 527. – Режим доступа: [http://ej.kubagro.ru/2011/07/pdf/39.pdf](#)
8. А. П. Трунев. Electron structure, hydrino and cold fusion//Chaos and Correlation, № 11, Dec. 25, 2011, [http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR11_2011.pdf](#)
9. B.M. Terrones, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 354, 2025 (1992).