



Квантовая электродинамика Лоренца

Lorentz quantum electrodynamics

Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)

Alexander P. Trunev

Обсуждается вопрос о расширении электродинамики Лоренца до квантовой теории. Сформулирована система уравнений квантовой электродинамики Лоренца.

The question of extending the Lorentz electrodynamics to quantum theory is discussed. The system of equations of the Lorentz quantum electrodynamics was established.

Ключевые слова: релятивистская теория, квантовая электродинамика, квантовая механика, электрон, электромагнитное поле.

Keywords: Relativistic Theory, Quantum Electrodynamics, Quantum Mechanics, Electron, Electromagnetic Field.

Краткий обзор электродинамики Лоренца

В классической электродинамике электрон, как и любой другой заряд, наделен электрическим и магнитным полем. Для описания собственных полей электрона Лоренц /1/ использовал скалярный и векторный потенциалы, удовлетворяющие уравнениям:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= -\rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= -\frac{\mathbf{u}}{c} \rho\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь c, ρ, u - скорость света, плотность заряда и скорость движения электрона соответственно. В частном случае движения с постоянной скоростью векторный потенциал выражается через скалярный потенциал в виде /1/

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{u}}{c} \phi \quad (2)$$

Следовательно, проблема определения полей электрона сводится к задаче о потенциале скопления зарядов с заданной плотностью и скоростью центра масс. Как известно, для решения этой задачи Лоренц /1/ использовал преобразование переменных (преобразования Лоренца), позволяющее свести задачу к уравнению Пуассона:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\rho' = \rho \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \phi' = \phi \sqrt{1 - \beta^2} \quad (3)$$

Здесь $\beta = v/c$.

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} = -\rho' \quad (4)$$

Таким образом, задача о нахождении потенциала движущихся зарядов сведена к задаче о нахождении электростатического потенциала неподвижных зарядов с заданной плотностью. Действительно, искомые электрические и магнитные поля определяются через градиенты потенциала, являющегося решением уравнения (4), имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (1 - \beta^2)^{-1} \frac{\partial \phi'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \frac{\partial \phi'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \frac{\partial \phi'}{\partial z}$$

$$A_x = \beta \phi, \quad A_y = A_z = 0$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\beta^2 c \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Отсюда находим электрическое и магнитное поле по формулам

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = - \begin{pmatrix} (1 - \beta^2) \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi_z \\ \phi_y \end{pmatrix}$$

Переход от системы (1) к уравнению (4) собственно и является преобразованием Лоренца. Это преобразование включает преобразование Галилея, $x \rightarrow x - ut$, а также преобразование подобия (3), хорошо знакомое из релятивистской теории.

Однако плотность заряда при этом остается неизвестной величиной, которая в теории Абрагама /2/ заменяется распределением поверхностного заряда на жесткой сфере, т.е. граничным условием. Такой подход позволяет получить полное решение задачи об электрическом и магнитном поле электрона, движущегося с постоянной скоростью /1-2/. Действительно, исходная жесткая сфера при преобразованиях (3) трансформируется в эллипсоид вращения, для которого решение электростатической задачи хорошо

известно. Используя это решение, Абрагам /2/ вычислил энергию и импульс электромагнитного поля электрона в виде

$$E = \frac{e^2}{8\pi R\beta} \left(\ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \beta \right)$$

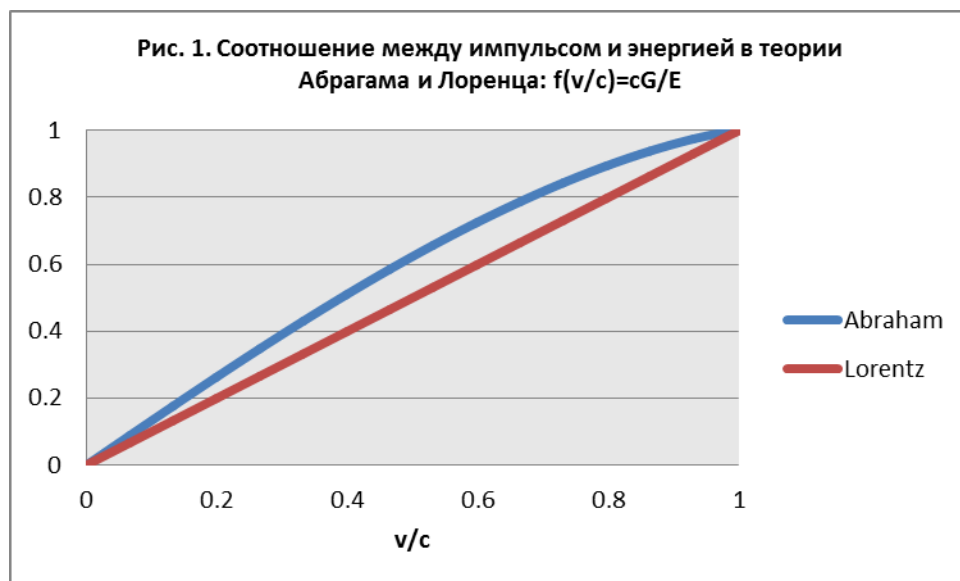
$$G = p_x = \frac{e^2}{8\pi R c \beta^2} \left(\frac{(1+\beta^2)}{2} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} - \beta \right) \quad (5)$$

Здесь R – радиус сферы.

Предельное значение полной энергии электрона при $\beta \rightarrow 0$ составляет

$$E_0 = E(0) = \frac{e^2}{8\pi R}$$

Комбинируя первое и второе уравнение (5) находим дисперсионное соотношение, которое запишем в форме $f(v/c) = cG/E$ - рис. 1.



Используя выражение импульса (9), можно определить две массы – продольную и поперечную, по формулам

$$m_l = \frac{1}{c} \frac{dG}{d\beta} = \frac{e^2}{6\pi R c^2 \beta^3} \left(\frac{2\beta}{1-\beta^2} - \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$m_t = \frac{1}{c} \frac{G}{\beta} = \frac{e^2}{6\pi R c^2 \beta^3} \left(-2\beta + (1+\beta^2) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \quad (6)$$

Продольная масса характеризует инерцию тела при изменении скорости по величине, а поперечная масса характеризует инерцию при изменении скорости только по направлению, например, при движении электрона в однородном магнитном поле. Предельные значения продольной и поперечной массы (6) совпадают при $\beta \rightarrow 0$, в этом случае

$$m_l = m_t = \frac{e^2}{6\pi R c^2} \quad (7)$$

Предполагая, что предельное значение массы (7) равно массе покоя, можно определить классический радиус электрона

$$R_e = \frac{e^2}{6\pi m_0 c^2} \quad (8)$$

Кауфман [3] выполнил ряд экспериментов, в которых измерялось отклонение бета-электронов в электрическом и магнитном поле. Он показал, что экспериментальная зависимость поперечной массы от скорости хорошо соответствует теории Абрагама – рис. 2. Кауфман считал, что масса электрона целиком происходит из энергии электромагнитного поля, как следует из выражений (5)-(6).

Теория электронов Лоренца /1/, как и теория Абрагама /2/, опирается на представления о существовании светоносного эфира – сплошной среды, в которой распространяются электромагнитные колебания. Отрицательный результат эксперимента Майкельсона-Морли по обнаружению влияния движения Земли относительно эфира на скорость света, заставил Лоренца пересмотреть основы теории электронов /1/. В результате Лоренц сформулировал преобразования уравнений электродинамики общего вида, которые вместе с преобразованиями (3) включают также преобразование времени по формуле

$$t' = \frac{t - \beta x / c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9)$$

Лоренц предположил, что все материальные тела испытывают сокращение размера вдоль направления движения по формуле (3), которую для этого случая можно представить в виде

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (10)$$

В новой модели электрон является проводящей сферой в системе координат, где он покоится, а в движущейся системе координат электрон представляется эллипсоидом вращения, сжатым вдоль направления движения согласно (10). Лоренц установил, что в этом случае продольная и поперечная масса электрона преобразуется согласно уравнениям

$$m_l = m_0 (1 - \beta^2)^{-3/2}, \quad m_t = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (11)$$

Лоренц показал, что эти уравнения применимы не только к электронам и атомам, но и к любым материальным телам.

Эйнштейн /4-5/ развил идеи Лоренца, обосновав их на основе принципа относительности и постоянства скорости света. После того, как была

опубликована первая работа по теории относительности /4/, Кауфман повторил свои опыты с целью сравнить теории Абрагама /2/, Бухерера /6/ и Лоренца-Эйнштейна. И хотя результаты Кауфмана /3/ больше соответствовали теории Абрагама /2/, Лоренц /1/ и Эйнштейн /5/ высоко отозвались об этих экспериментах, нисколько не сомневаясь в их достоверности. В последующие годы было поставлено множество экспериментов, которые подтверждали теорию Лоренца-Эйнштейна /7-9/. Однако теория Абрагама была отвергнута как несостоятельная лишь после публикации данных /9/, полученных в электростатическом анализаторе, которые содержали всего три точки - см. рис. 2.

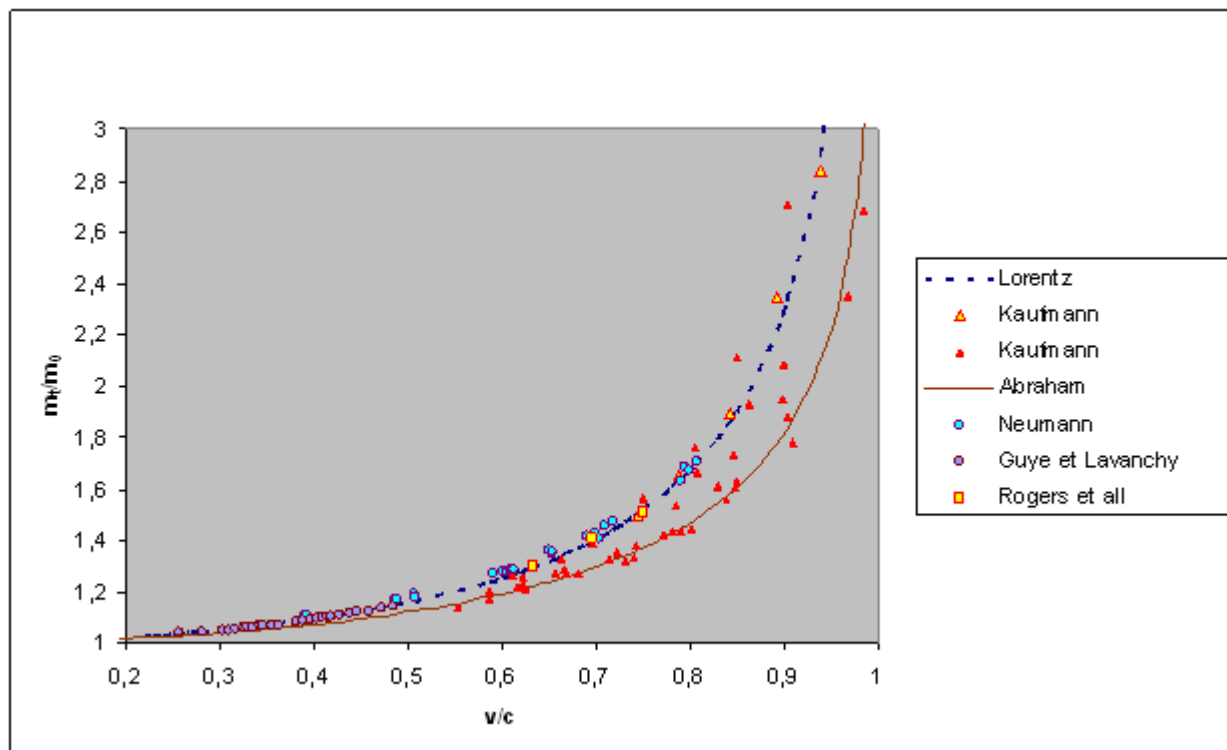


Рис. 2. Зависимость поперечной массы электрона от скорости согласно теории Абрагама /2/ и Лоренца-Эйнштейна, а также по данным /3, 7-9/.

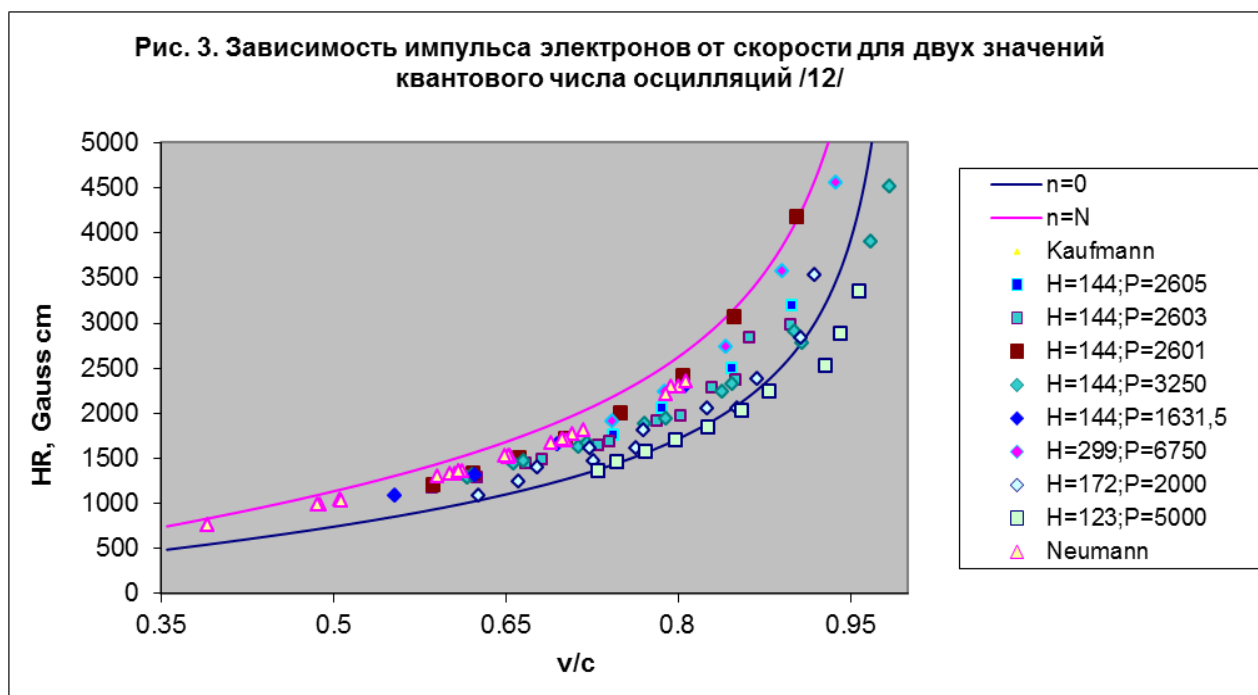
В то время это указывало, скорее, на потерю интереса к проблеме, нежели на стремление согласовать теорию Лоренца-Эйнштейна и эксперимент. Действительно, на момент публикации работы /9/ (в 1940 г) уже существовала релятивистская квантовая теория электрона Дирака /10/, а спектр атома водорода получил объяснение на основе нерелятивистского уравнения Шредингера /11/. Специальная теория относительности была принята ведущими физиками-теоретиками без дальнейшего обсуждения, как основа для построения физики элементарных частиц.

Основой релятивистской квантовой теории Дирака /10/ является специальная теория относительности (СТО), выведенная Эйнштейном /4/ на основе анализа системы уравнений Максвелла-Герца и электродинамики Лоренца /1/, в которой электрон описывается уравнениями (1). Но данные на рис. 2, кропотливо собранные целым поколением экспериментаторов для подтверждения теории Эйнштейна, получены на основе анализа траекторий электронов, а вовсе не спиноров в теории Дирака /10/. Если же выполнить анализ данных /3, 7-9/ на основе теории Дирака, то приходим к неожиданному результату, что разброс данных на рис. 2 может быть связан с возбуждением частот собственных колебаний электронов в магнитном поле /12/ - рис. 3.

В этом смысле эксперименты /3, 7-9/ и другие можно рассматривать как подгонку под заранее известный результат, путем настройки установки на воспроизведение той или иной частоты квантовых осцилляций. Следовательно, теория Дирака находится в противоречии с исходной гипотезой Лоренца, так как не позволяет проверить эту гипотезу экспериментальным путем. Например, невозможно отличить теорию Абрагама от теории Лоренца, которые в равной степени согласуются с

теорией Дирака, которая, в свою очередь, хорошо описывает всю совокупность известных экспериментальных данных – см. рис. 3.

Другой очевидный парадокс состоит в том, что порознь квантовая механика и электродинамика являются линейными теориями, для которых справедлив принцип суперпозиции, тогда как квантовая электродинамика (КЭД), объединяющая теорию Дирака и электродинамику является нелинейной теорией /13/.



Таким образом, исторически электродинамика Лоренца явилась основой для вывода преобразований Лоренца, на основе которых, в свою очередь, возникла релятивистская квантовая теория Дирака /10/. Следовательно, эти теории должны быть связаны между собой, так как описывают одну и ту же частицу – электрон.

Теория Миллса и ее обобщение

Описанные парадоксы нашли неожиданное разрешение в теории Миллса /14/.

Основная гипотеза Миллса /14/ состоит в том, что плотность электрического заряда в правой части уравнений (1) описывается волновым уравнением вида

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = 0 \quad (12)$$

Здесь v - скорость волн плотности заряда.

Гипотеза (12) вместе с предположением о распределении заряда в атоме по поверхности сферы фиксированного радиуса, определяемого из теории Бора, позволяет рассчитать уровни энергии в многоэлектронных атомах, а также определить аномальный магнитный момент электрона /14/. В этом смысле теория Миллса является альтернативой квантовой электродинамики, так как позволяет вычислить все релятивистские квантовые эффекты с той же точностью, что и КЭД, но при этом является линейной теорией.

Основное уравнение (12) в теории Миллса, которое он использовал для решения задач атомной физики, химии, а также физики элементарных частиц, на первый взгляд, не связано напрямую с квантовой механикой. Более того, Миллс утверждает, что квантовая механика является глубоко ошибочной теорией, содержащей внутренние логические противоречия. В действительности, однако, легко показать, используя результаты нашей работы /12/, что уравнение (2) может быть получено из релятивистского квантового уравнения Дирака /15/. Действительно, как показано в работе /12/, плотность заряда и потенциал электрона при условии одновременного выполнения уравнения Дирака и уравнений Лоренца (1), связаны соотношением:

$$\rho = \left(-\frac{e}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi} E - c(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p})) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi}^2 - \tilde{\mathbf{A}}^2) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi \quad (13)$$

Здесь обозначено E, \mathbf{p} - энергия и импульс электрона, $\tilde{\phi}, \tilde{\mathbf{A}}$ - скалярный и векторный потенциал внешнего электромагнитного поля. Отсюда находим, что в отсутствии внешних полей плотность заряда линейно зависит от потенциала электрона:

$$\rho = -\frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \phi \quad (14)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (1), получим окончательно

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \rho \quad (15)$$

Миллс использовал свое базовое уравнение (12) только для нахождения сингулярных решений, в которых распределение плотности по радиальной координате описывается дельта функцией Дирака. На таких решениях уравнение (15) принимает вид

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho = 0 \quad (16)$$

Что и требовалось доказать.

Дадим простой вывод уравнения (13), основанный на специальной записи уравнения Дирака в форме уравнения второго порядка /13/

$$\left(\left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \tilde{\phi} \right)^2 - \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 - m_0^2 c^2 + \frac{e\hbar}{c} \hat{\Sigma} \tilde{\mathbf{H}} - i \frac{e\hbar}{c} \hat{\alpha} \tilde{\mathbf{E}} \right) \psi = 0 \quad (17)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ - электрическое и магнитное поле внешнего источника, а соответствующие слагаемые в уравнении (17) описывают взаимодействие спина электрона с внешним электромагнитным полем. Обычно энергия этого взаимодействия сравнительно мала, поэтому ею можно пренебречь. В результате уравнение (17) приводится к виду уравнения Клейна-Гордона

$$\left(\left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \tilde{\phi} \right)^2 - \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 - m_0^2 c^2 \right) \psi = 0 \quad (18)$$

Полученное уравнение содержит только единичную матрицу, поэтому оно сводится к системе из четырех независимых уравнений. Но система (1) также состоит из четырех независимых уравнений, поэтому между решениями системы (1) и (18) должна существовать связь, так как они описывают состояние одного и того же физического объекта - электрона. Предполагая, что эта связь является линейной, и, что выполняется калибровка Лоренца, приходим к уравнению (13). Отметим, что в квантовой электродинамике ток и волновая функция связаны между собой нелинейным образом. Неизвестно, однако, должна ли эта связь всегда быть нелинейной. Теория Миллса /14/, построенная на основе линейного уравнения (12), позволяет предсказать аномальный магнитный момент электрона и мюона, и лэмбовский сдвиг с той же точностью, что и КЭД, но без математических ухищрений, свойственных этой теории.

Квантовая электродинамика Лоренца

Сформулируем полную систему уравнений линейной квантовой электродинамики Лоренца:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= -\rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= -\frac{\mathbf{u}}{c} \rho\end{aligned}\quad (19)$$

$$\rho = \left(-\frac{e}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi} E - c(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p})) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi}^2 - \tilde{\mathbf{A}}^2) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi$$

Согласно правилу соответствия операторов импульса и энергии, положим в правой части последнего уравнения (19)

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (20)$$

Неопределенной величиной остается скорость электронов в правой части в третьем уравнении (19). Используем тот факт, что для преобразований Лоренца справедливо выражение

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{p}}{E} c^2$$

Умножим обе части третьего уравнения (19) на E слева, в результате получим

$$E \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{E}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = -E \frac{\mathbf{u}}{c} \rho = -c \mathbf{p} \rho$$

Заменяя в этом уравнении энергию и импульс на операторы дифференцирования согласно (20), находим

$$\nabla^2 \mathbf{A}_t - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}_t = c \nabla \rho \quad (21)$$

Используем выражение электрического поля через электродинамические потенциалы, имеем

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\mathbf{A}_t$$

Выразим отсюда производную векторного потенциала по времени и подставим в уравнение (21). В результате, учитывая первое уравнение (19), находим окончательно, что электрическое поле электрона описывается волновым уравнением

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = 0 \quad (22)$$

Уравнение (22) необходимо дополнить стандартным уравнением для дивергенции поля, которое, с учетом выражения плотности электрического заряда, имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left(-\frac{e}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi} E - c(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p})) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi}^2 - \tilde{\mathbf{A}}^2) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi$$

Заметим, что при переходе от второго уравнения (19) к уравнению (22), из описания выпало магнитное поле электрона. Чтобы восстановить симметрию, присущую уравнениям Максвелла, применим операцию ротора к третьему уравнению (19), в результате получим

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = -\frac{1}{c}\mathbf{u} \times \nabla\rho \quad (23)$$

Здесь обозначено $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$.

Далее используем соотношение между импульсом, скоростью и энергией в теории Лоренца-Эйнштейна. Умножим левую и правую часть уравнения (23) на E слева, в результате имеем

$$E\nabla^2\mathbf{H} - E\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = -\frac{1}{c}E\mathbf{u}\times\nabla\rho = -c\mathbf{p}\times\nabla\rho$$

Наконец, заменяя операторы импульса и энергии по формулам (20), и учитывая, что ротор градиента любой функции равен нулю, находим окончательно

$$\nabla^2\mathbf{H}_t - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H}_t = 0 \quad (24)$$

Учитывая тот факт, что в квантовой механике электрон нельзя представить как статический источник, можно понизить порядок уравнения (24), поэтому наряду с уравнением (24) выполняется и стандартное уравнение, описывающее магнитное поле электромагнитных волн

$$\nabla^2\mathbf{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{H} = 0 \quad (25)$$

Наконец, учитывая определение вектора напряженности магнитного поля, находим последнее уравнение квантовой электродинамики Лоренца

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0 \quad (26)$$

Далее заметим, что первое уравнение (19) с учетом выражения плотности заряда, задаваемого третьим уравнением (19), сводится к уравнению Клейна-Гордона (18). Следовательно, полная система уравнений квантовой электродинамики Лоренца имеет вид

$$\left(\left(\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \tilde{\phi} \right)^2 - \left(i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \tilde{\mathbf{A}} \right)^2 - m_0^2 c^2 \right) \phi = 0 \quad (27)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \left(-\frac{e}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi} E - c(\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{p})) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\tilde{\phi}^2 - \tilde{\mathbf{A}}^2) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

Здесь первое уравнение описывает взаимодействие электрона с внешним полем, второе и третье уравнения описывают электромагнитное излучение, а четвертое уравнение описывает объемное распределение заряда электрона, обусловленное квантовыми эффектами. Как это следует из системы уравнений (27), для описания электрона в квантовой электродинамике Лоренца не требуется вводить волновую функцию, так как система уравнений (23) является замкнутой, а параметры теории имеют ясный физический смысл.

Многочисленные применения квантовой электродинамики Лоренца к описанию различных физических явлений можно найти в монографии /14/. Можно отметить, что согласие развитой теории с экспериментом является достаточно точным, как и в стандартной КЭД, но при этом за счет линейности теории достигается необычайная простота описания основных квантовых релятивистских эффектов.

References

1. Lorentz, Hendrik Antoon, *The theory of electrons and its applications to the phenomena of light and radiant heat; a course of lectures delivered in Columbia university, New York, in March and April 1906*, New York, [NY.]: Columbia University Press
2. Max Abraham. [Prinzipien der Dynamik des Elektrons](#)// *Annalen der Physik*, **315** (1), 1903, 105–179.
3. Kaufmann, W. [Über die Konstitution des Elektrons](#)// *Annalen der Physik*, **19**, 1906, 487–553.
4. Albert Einstein. [Zur Elektrodynamik bewegter Körper](#)// *Annalen der Physik*, **322** (10), 1905, 891–921.
5. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов в четырех томах. Т.1. – М., Наука, 1965.
6. Bucherer A. H. [Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes](#)// *Annalen der Physik*, **316** (6), 1903, 270–283.
7. Neumann, Günther. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen//*Annalen der Physik* 350 (20): 1914, 529–579.
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k153486.image.f542.pagination>
8. Ch. E. Guye et L a v a n c h y, Verification experimentale de la forraule de L o r e n t z - E i n s t e i n par les rayons cathodiques de grande vitesse. Arch, desSc Phys et Nat. XLII, pp. 287, 353, 441; 1916.
9. Rogers, M. M. et al. A Determination of the Masses and Velocities of Three Radium B Beta-Particles, *Physical Review*, 57, 1940, 379–383.
10. Paul A.M. Dirac. Theory of Electrons and Positrons/Nobel Lecture, December 12, 1933, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/dirac-lecture.pdfErwin
11. Schrödinger. The Fundamental Idea of Wave Mechanics/Nobel Lecture, December 12, 1933, http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/schrodinger-lecture.pdf
12. A. P. Trunev. Structure of electron in the classic and quantum electrodynamics//*Chaos and Correlation*, № 7, 2010, http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR7_1_2010.pdf
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. IV/В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1989, - 728 с.
14. Mills, Randell L. The Grand Unified Theory of Classical Physics. Blacklight Power, 2008. <http://www.blacklightpower.com/theory/bookdownload.shtml>
15. A. P. Trunev. Electron structure, hydrino and cold fusion//*Chaos and Correlation*, № 11, Dec. 25, 2011, http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR11_2011.pdf