



## Структура электрона в классической и квантовой электродинамике

## Structure of electron in the classic and quantum electrodynamics

Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)

Alexander P. Trunev

На основе квантовой электродинамики сделан анализ известных экспериментов, послуживших основой для развития релятивистской теории. Развита метод описания квантовых осцилляций электронов в постоянных магнитных и электрических полях при движении частиц в окрестности классических орбит. Обсуждается нелинейная модель структуры электрона.

Famous experiments of the relativistic theory have been analyzed on the basis of quantum electrodynamics. A theory of electron quantum oscillations in a static magnetic and electric field for the particle moving around the classical orbit is proposed. Nonlinear theory of the electron structure is discussed.

Ключевые слова: Релятивистская теория, квантовая электродинамика, теория Лоренца-Эйнштейна, электрон, электромагнитное поле.

Keywords: Relativistic Theory, Quantum Electrodynamics, Lorentz's Theory, Electron, Electromagnetic Field

### Введение

Основы классической теории движения заряженных частиц в электрических и магнитных полях были заложены в трудах Лоренца /1-2/. В 1897 году, исследуя катодные лучи, Томсон /3/ открыл элементарные носители отрицательного электричества, которые позже получили название электроны. Томсон измерил отношение заряда к массе электрона, предполагая, что динамика этих частиц описывается классическими уравнениями. Но уже в 1901 г, исследуя бета-лучи, Кауфман /4-5/ обнаружил, что закон отклонения бета-электронов в электрическом и в магнитном поле отличается от классических законов. Используя результаты ранних опытов Кауфмана /4/, Абрагам /6/, Бухерер /7/ и Эйнштейн /8-9/ развили теории движения электронов, движущихся со скоростью, близкой к скорости света. Однако, точность ранних опытов Кауфмана /4/ не была достаточной, что бы решить, какая из моделей правильно описывает динамику электрона. В 1905-1906 г

Кауфман повторил свои эксперименты /5/, а также сделал анализ движения электрона на основе теорий Абрагама /6/, Лоренца /2/ и новой теории Эйнштейна /8/, доказав идентичность последних двух, но данные его экспериментов совпали с теорией Абрагама /6/.

Планк /10/ выполнил анализ данных /4/ и показал их близкое соответствие теории Лоренца-Эйнштейна. Нейман выполнил ряд экспериментов /11/ с бета-лучами, в которых скорость бета-электронов определялась с высокой точностью, а также сравнил теории /2, 6-8/. Он подтвердил теорию Лоренца-Эйнштейна, однако сомнения в правильности этой теории все еще оставались, поэтому было выполнено множество экспериментов с катодными лучами /12/, которые, казалось, окончательно подтверждали теорию Лоренца-Эйнштейна. Но реально эксперимент с необходимой точностью был поставлен только в 1940 г, когда Роджерс и другие измерили параметры движения бета-электронов в электростатическом анализаторе /13/. И только после этого теория Лоренца была признана верной, а теория Абрагама была отвергнута как несостоятельная.

Отметим, что теория /6/ существенно опирается на представления о структуре электрона, как жесткой заряженной сферы. В теории же Лоренца-Эйнштейна динамика электрона объясняется через изменение геометрии пространства-времени. Вместе с признанием новой геометрии пространства-времени /9/, были отброшены идеи о структуре электрона /6/. В современной квантовой релятивистской и нерелятивистской теории /14-15/ электрон наделяют различными свойствами – массой покоя, зарядом, спином и лептонным зарядом. Согласно современным представлениям, электрон взаимодействует не только с электромагнитным полем, но и принимает участие в слабом взаимодействии, ответственном за распад частиц /16/. Кроме того, электрон обладает массой покоя и, следовательно, вовлечен в гравитационное взаимодействие. Электрон является кирпичиком мироздания в модели великого объединения /17/. Структура электрона не выявляется вплоть до масштабов порядка  $10^{-18}$  м, тогда как классический радиус

электрона, согласно /2/, составляет порядка  $10^{-15}$  м. Электрон является первой элементарной частицей, открытой учеными. Многие методы физики элементарных частиц и релятивистская теория возникли при исследовании катодных лучей и бета частиц /2-12/. Однако о структуре электрона в наше время также мало известно, как и 100 лет назад, когда электрон был предметом не только научных исследований, но и философских исканий.

В настоящей работе классические эксперименты /4-5, 11/ анализируются в рамках квантовой электродинамики. Показано, что гипотеза Абрагама /6/ об электромагнитном происхождении массы электрона находит подтверждение в задаче о движении электрона в скрещенных полях.

### Преобразования Лоренца

В классической электродинамике электрон, как и любой другой заряд, наделен электрическим и магнитным полем. Для описания собственных полей электрона используются скалярный и векторный потенциалы, удовлетворяющие уравнениям /2/:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi &= -\rho \\ \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} &= -\frac{\mathbf{u}}{c} \rho \end{aligned} \quad (1)$$

В частном случае движения с постоянной скоростью векторный потенциал выражается через скалярный потенциал в виде /2/

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{u}}{c} \phi \quad (2)$$

Следовательно, проблема определения полей электрона сводится к задаче о потенциале скопления зарядов с заданной плотностью и скоростью центра масс.

Для решения этой задачи Лоренц использовал преобразование переменных, позволяющее свести задачу к уравнению Пуассона. Рассмотрим это

преобразование в том виде, как оно представлено в /2/. Предположим, что электрон движется вдоль оси  $Ox$ . Перейдем в сопутствующую систему координат, в которой производные потенциала по времени имеют вид (здесь Лоренц использует преобразование Галилея)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -u \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (2)$$

В этой системе отсчета первое уравнение (1) можно представить в форме

$$(1 - \beta^2) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\rho \quad (3)$$

Здесь  $\beta = u/c$ .

Введем новую переменную по формуле

$$x' = \frac{x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4)$$

В этих обозначениях уравнение (3) принимает вид уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\rho \quad (5)$$

Отметим, что в силу (4) элемент объема изменился

$$dx dy dz = \sqrt{1 - \beta^2} dx' dy dz$$

Следовательно, для полного подобия необходимо положить

$$\rho' = \rho \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \phi' = \phi \sqrt{1 - \beta^2} \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial z^2} = -\rho' \quad (7)$$

Таким образом, задача о нахождении потенциала движущихся зарядов сведена к задаче о нахождении электростатического потенциала неподвижных зарядов с заданной плотностью. Действительно, искомые электрические и магнитные поля определяются через градиенты потенциала, являющегося решением уравнения (7), имеем

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (1 - \beta^2)^{-1} \frac{\partial \phi'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \frac{\partial \phi'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (1 - \beta^2)^{-1/2} \frac{\partial \phi'}{\partial z}$$

$$A_x = \beta \phi, \quad A_y = A_z = 0$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\beta^2 c \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Отсюда находим электрическое и магнитное поле по формулам

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = - \begin{pmatrix} (1 - \beta^2) \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \nabla \times \mathbf{A} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -\phi_z \\ \phi_y \end{pmatrix}$$

Переход от системы (1) к уравнению (7) собственно и является преобразованием Лоренца. Это преобразование включает преобразование Галилея,  $x \rightarrow x - ut$ , а также преобразование подобия (4) и (6). Комбинируя эти два преобразования, находим формулу, хорошо знакомую из релятивистской теории

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (8)$$

В этом изложении преобразования Лоренца выглядят просто как математический трюк, призванный облегчить нахождение решения частной задачи (1). Однако в работах Эйнштейна /8-9/ аналогичные преобразования

представлены уже как фундаментальный закон природы, определяющий другие физические законы, которые должны быть записаны в формате специальной теории относительности, чтобы автоматически удовлетворять ее постулатам.

### Теория Абрагама

Рассмотрим решение уравнений (1) в частном случае, когда электрон представляет собой жесткую заряженную сферу. Преобразование подобия (4) отображает сферу на эллипсоид вращения, вытянутый вдоль направления движения. Решение задачи о распределении потенциала вокруг проводящего эллипсоида хорошо известно /2/. Используя это решение, Абрагам /6/ вычислил импульс электрона в виде

$$G = p_x = \frac{e^2}{8\pi R c \beta^2} \left( \frac{(1 + \beta^2)}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \beta \right) \quad (9)$$

Здесь  $R$  – радиус сферы. Согласно /2/, сумма полной электрической и магнитной энергии электрона определяется как

$$E = \frac{e^2}{8\pi R \beta} \left( \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} - \beta \right) \quad (10)$$

Предельное значение полной энергии электрона при  $\beta \rightarrow 0$  составляет

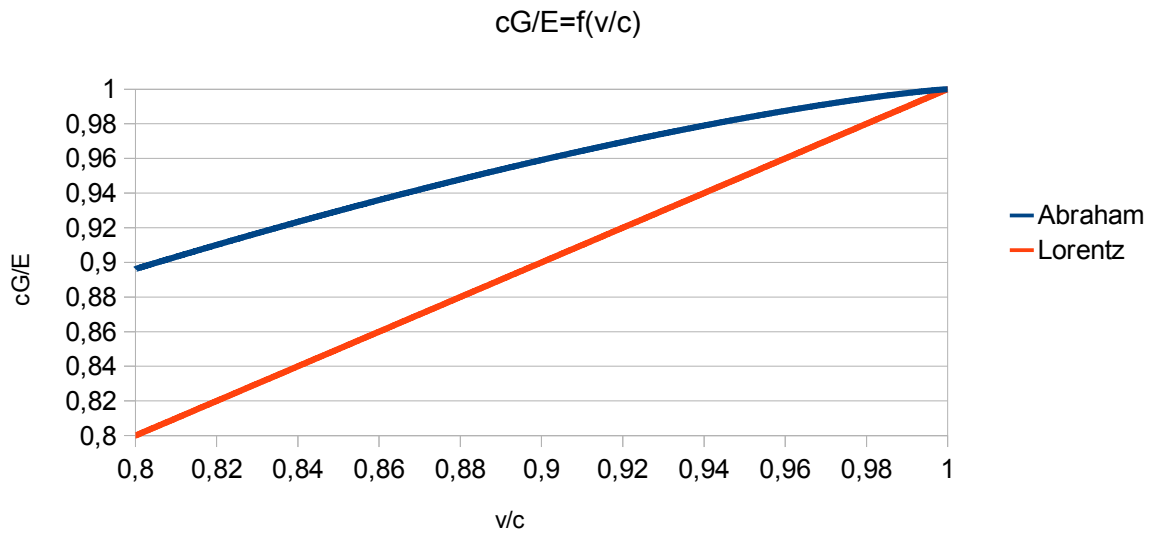
$$E_0 = E(0) = \frac{e^2}{8\pi R}$$

Комбинируя (9) и (10), находим дисперсионное соотношение  $E = E(G)$  - рис. 1. Согласно данным, приведенным на рис. 1, в теории Абрагама энергия практически линейно зависит от импульса уже при  $v/c=0,98$ :

$$E(G) \approx cG + E_0 \quad (11)$$

причем это соотношение выполняется тем точнее, чем ближе скорость электрона к скорости света. Отметим также, что в теории Абрагама линейное соотношение (11) выполняется точнее, чем в теории Лоренца – рис.1.

Рис 1. Дисперсионное соотношение в теории Абрагама и Лоренца



Используя выражение импульса (9), можно определить две массы – продольную и поперечную, по формулам

$$m_l = \frac{1}{c} \frac{dG}{d\beta} = \frac{e^2}{6\pi R c^2 \beta^3} \left( \frac{2\beta}{1-\beta^2} - \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right) \quad (12)$$

$$m_t = \frac{1}{c} \frac{G}{\beta} = \frac{e^2}{6\pi R c^2 \beta^3} \left( -2\beta + (1+\beta^2) \ln \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

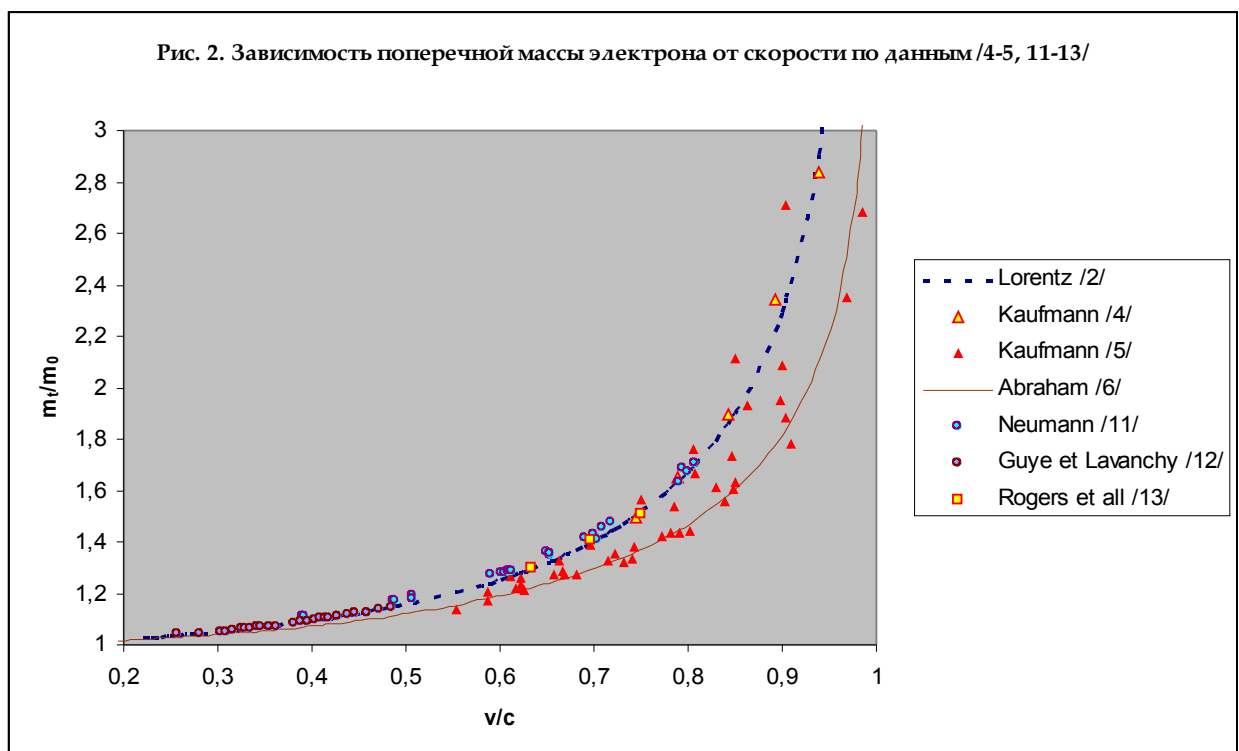
Продольная масса характеризует инерцию тела при изменении скорости по величине, а поперечная масса характеризует инерцию при изменении скорости только по направлению, например, при движении электрона в однородном магнитном поле. Предельные значения продольной и поперечной массы (12) при  $\beta \rightarrow 0$  совпадают

$$m_l = m_t = \frac{e^2}{6\pi R c^2} \quad (13)$$

Предполагая, что предельное значение массы (13) равно массе покоя, можно определить классический радиус электрона

$$R_e = \frac{e^2}{6\pi m_0 c^2} \quad (14)$$

Кауфман показал /5/, что зависимость поперечной массы от скорости, полученная по измерениям отклонения бета-электронов в электрическом и магнитном поле, хорошо соответствует теории Абрагама – рис. 2. Кауфман считал, что масса электрона целиком происходит из энергии электромагнитного поля, как следует из выражений (9-13). Теория Абрагама /6/ на протяжении многих лет была альтернативой теории Лоренца-Эйнштейна. Ее достоинством является простота и наглядность физических идей, использованных при построении модели электрона.



### Теория Лоренца-Эйнштейна

Теория электронов Лоренца /2/, как и теория Абрагама /6/, опирается на представления о существовании светоносного эфира – сплошной среды, в которой распространяются электромагнитные колебания. Отрицательный результат эксперимента Майкельсона-Морли по обнаружению влияния движения Земли относительно эфира на скорость света, заставил Лоренца



пересмотреть основы теории электронов /2/. В результате Лоренц сформулировал преобразования уравнений электродинамики общего вида, которые вместе с преобразованием координат (8) включают также преобразование времени по формуле

$$t' = \frac{t - \beta x / c}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16)$$

Лоренц предположил, что все материальные тела испытывают сокращение размера вдоль направления движения по формуле (4), которую для этого случая можно представить в виде

$$l = l' \sqrt{1 - \beta^2} \quad (17)$$

В новой модели электрон является проводящей сферой в системе координат, где он покоится, а в движущейся системе координат электрон представляется эллипсоидом вращения, сжатым вдоль направления движения согласно (17). Лоренц показал, что в этом случае продольная и поперечная масса электрона преобразуется согласно уравнениям

$$m_l = m_0 (1 - \beta^2)^{-3/2}, \quad m_t = m_0 (1 - \beta^2)^{-1/2} \quad (18)$$

Лоренц показал, что эти уравнения применимы не только к электронам и атомам, но и к любым материальным телам.

Эйнштейн развил идеи Лоренца, обосновав их на основе принципа относительности и постоянства скорости света /8/. После того, как была опубликована первая работа по теории относительности /8/, Кауфман повторил свои опыты /5/ с целью сравнить теории Абрагама /6/, Бухерера /7/ и Лоренца-Эйнштейна. И хотя результаты Кауфмана /5/ больше соответствовали теории Абрагама /6/, Лоренц /2/ и Эйнштейн /9/ высоко отозвались об этих экспериментах, нисколько не сомневаясь в их достоверности. В последующие годы было поставлено множество экспериментов, которые подтверждали теорию Лоренца-Эйнштейна /11-13/. Однако теория Абрагама была отвергнута как несостоятельная лишь после

публикации данных /13/, полученных в электростатическом анализаторе, которые содержали всего три точки - см. рис. 2.

В то время это указывало, скорее, на потерю интереса к проблеме, связанной со структурой электрона, нежели на стремление согласовать теорию Лоренца-Эйнштейна и эксперимент. Действительно, на момент публикации работы /13/ (в 1940 г) уже существовала релятивистская квантовая теория электрона Дирака /14/, а спектр атома водорода получил объяснение на основе нерелятивистского уравнения Шредингера /15/. Релятивистская теория была принята вместе с постулатом о постоянстве скорости света и гипотезой (17) без дальнейшего обсуждения. Вопрос же о структуре электрона так и остался без ответа.

Возвращаясь к исходной задаче о структуре электрона и к выражению (4), мы видим один путь решения этой задачи, который приводит к теории Абрагама. Теория Лоренца-Эйнштейна дает другой, более общий способ решения. Сравнивая эти два решения с экспериментальными данными на рис. 2, находим, что подтверждаются обе теории – Абрагама и Лоренца-Эйнштейна, а не одна из них. Действительно, теория Абрагама не противоречит теории Лоренца-Эйнштейна, поскольку спектральное соотношение между импульсом и энергией, типа приведенного на рис. 1 выполняется и в теории Лоренца-Эйнштейна для ультрарелятивистских электронов. Иначе говоря, теория Абрагама описывает состояние электрона, которое может реализоваться в одних специфических условиях, тогда как теория Лоренца-Эйнштейна описывает некое другое состояние, свойственное всем материальным телам, а не только электронам.

### **Теория Дирака**

Одним из следствий теории Лоренца-Эйнштейна является дисперсионное соотношение между импульсом и энергией частицы, широко используемое в современной квантовой теории,

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 - m_0^2 c^2 = 0 \quad (19)$$

В квантовой механике энергия и импульс имеют смысл операторов дифференцирования. Заменяем в уравнении (19) энергию и импульс на соответствующие операторы по формулам

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

В этих обозначениях стандартное уравнение релятивистской квантовой механики имеет вид

$$\left( \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 - m_0^2 c^2 \right) \psi = \hbar^2 \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0 \quad (20)$$

Однако уравнение (20) оказалось неэффективным при описании электрона, обладающего спином 1/2. Дирак предположил /14/, что в случае электронов соответствующее уравнение является линейным по операторам дифференцирования, т.е. имеет вид

$$\left( \frac{E}{c} - \alpha_i p_i - \alpha_0 m_0 c \right) \psi = 0 \quad (21)$$

Здесь введены переменные (матрицы), коммутирующие с операторами импульса и энергии и удовлетворяющие уравнениям /14/

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= 1, \quad i = 0, 1, 2, 3. \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 0, \quad i \neq j \end{aligned} \quad (22)$$

Сравнивая дисперсионное соотношение (11) с уравнением (21), находим, что теория Абрагама соответствует теории Дирака, тогда как теория Лоренца-Эйнштейна, следствием которой является дисперсионное соотношение (19), соответствует уравнению Клейна-Гордона (20).

Можно отметить, что уравнение Дирака (21) никак не соотносится с теорией Лоренца, основанной на уравнениях (1). В теории Лоренца электрон явно представлен своими электрическими и магнитными полями, потенциалы

которых описываются уравнениями (1). Именно для этих уравнений были выведены преобразования Лоренца. В теории Дирака у свободного электрона вообще нет собственного электромагнитного поля, поскольку уравнение (21) не содержит электрического заряда. В этой теории электрон является фермионом, т.е. частицей со спином  $\frac{1}{2}$ , а динамика электрона описывается четырехкомпонентным спинорным полем. Это поле не является по своей природе ни электрическим, ни магнитным. Оно описывает состояние любой элементарной частицы, обладающей спином  $\frac{1}{2}$ .

Куда же исчезло собственное электрическое и магнитное поле электрона, обладающего зарядом и магнитным моментом? В современной квантовой электродинамике этот вопрос тщательно замалчивается, так как его рассмотрение неминуемо приводит к вопросу о структуре электрона.

Теория Дирака позволяет понять различие в состояниях электрона в теории Абрагама и в теории Лоренца-Эйнштейна, наблюдаемое в экспериментах /4-5, 11-13/ - рис. 2. Как известно, в поле плоской электромагнитной волны электрон обладает эффективной массой, зависящей от среднеквадратичной величины 4-вектора потенциала по формуле (см. уравнение (40,15) в /18/):

$$m_e = m_0 \sqrt{1 - \frac{e^2}{m_0^2 c^4} \langle \phi^2 - \mathbf{A}^2 \rangle} \quad (23)$$

Это уравнение показывает, что в зависимости от соотношения между величиной скалярного и векторного потенциала, эффективная масса может быть больше или меньше реальной массы электрона. По своей форме уравнение (23) является классическим, хотя оно и является следствием уравнения Дирака (21) (его вывел Д. М. Волков в 1937 г на основе точного решения уравнения Дирака о движении электрона в поле плоской электромагнитной волны). Покажем, что аналогичный эффект наблюдается не только в случае электрона в плоской электромагнитной волне, но и в слабо изменяющихся электрических и магнитных полях такого типа, как в классических экспериментах /4-5, 11/.

### Квантование энергии электрона в скрещенных полях

Рассмотрим задачу о прохождении электронов через конденсатор такого типа, который был использован в работе /11/, т.е. конденсатор, в котором реализованы скрещенные поля. Уравнение Дирака (21), описывающее движение электрона во *внешнем* поле можно записать в форме уравнения второго порядка /18/

$$\left( \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \phi \right)^2 - \left( i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m_0^2 c^2 + \frac{e\hbar}{c} \hat{\Sigma} \mathbf{H} - i \frac{e\hbar}{c} \hat{\mathbf{a}} \mathbf{E} \right) \psi = 0 \quad (24)$$

Здесь обозначено

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & -\hat{\boldsymbol{\sigma}} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Последние два слагаемых в уравнении (24) описывают взаимодействие магнитного момента электрона с магнитным и электрическим полем соответственно. Энергия этого взаимодействия мала в сравнении с энергией орбитального движения электрона в магнитном поле, которая в экспериментах /4-5, 11/ была порядка  $m_0 c^2$ . Отбрасывая эти слагаемые, приходим к уравнению

$$\left( \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{e}{c} \phi \right)^2 - \left( i\hbar \nabla + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - m_0^2 c^2 \right) \psi = 0$$

Наконец, раскрывая скобки и используя калибровку Лоренца для потенциалов, получим

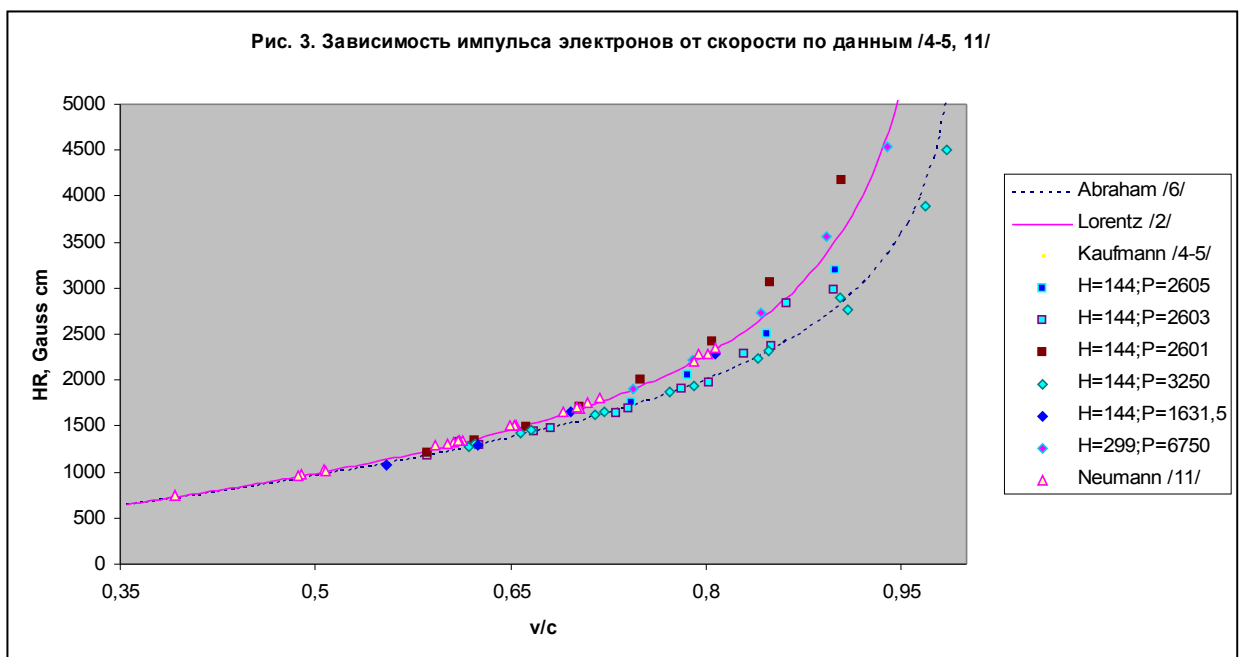
$$\left( \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 - \frac{e}{c^2} (\phi E - c(\mathbf{A}\mathbf{p})) + \frac{e^2}{c^2} (\phi^2 - \mathbf{A}^2) - m_0^2 c^2 \right) \psi = 0 \quad (25)$$

Заметим, что в работах /4-5, 11/ и других измерялся кинетический импульс частиц на основе данных по отклонению электронов в постоянном магнитном поле (подробный анализ данных /4-5, 11/ содержится в наших работах /19-20/) - рис. 3. Предполагая, что электрон движется по классической траектории радиуса  $R$ , запишем уравнение равновесия действующих сил

$$\frac{m v^2}{R} = e v H_y$$

Отсюда находим кинетический импульс

$$m v / e = H_y R$$



При анализе данных, приведенных на рис. 3, можно обратить внимание на сильное изменение импульса при незначительном изменении потенциала, приложенного к пластинам конденсатора. Действительно, для  $P=2603$  Вольт зависимость импульса от скорости хорошо согласуется с теорией Абрагама (уравнение (9)), а при  $P=2601$  Вольт данные ложатся выше зависимости (19), следующей из теории Лоренца-Эйнштейна. Для  $P=2605$  Вольт данные ложатся между двумя зависимостями – (9) и (19). Эта неустойчивость не может быть следствием уравнений классической динамики, которые

описывают отклонение частиц в электрическом и магнитном поле. Такое значительное рассеяние данных находит объяснение в рамках квантовой механики, как результат возбуждения квантовых осцилляций при движении электронов в магнитном поле [19-20]. Скорость электрона измерялась отдельно по величине отклонения в электрическом поле. В опытах Неймана [11] - см. рис. 4, отклонение электронов при движении в плоском конденсаторе в поперечном электрическом и магнитном поле равнялось нулю, что достигалось путем подбора тока в катушке соленоида и потенциала на пластинах конденсатора. Электростатический и векторный потенциал *калибровались* таким образом, чтобы сила Лоренца, действующая на электрон, точно равнялась нулю, т.е.

$$eE_z + e\beta_x H_y = 0 \quad (26)$$

С учетом симметрии задачи положим

$$A_x = H_y z, \quad \phi = \beta_x H_y z \quad (27)$$

В этом случае сила Лоренца равна нулю и, кроме того, в состояниях с заданным импульсом и энергией обращается в нуль линейное по заряду электрона слагаемое в уравнении (25), т.е.

$$\phi E - c(\mathbf{A}\mathbf{p}) = 0$$

Подставляя выражения (27) в уравнение (25), находим

$$\left( \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 + \hbar^2 \nabla_z^2 - \frac{e^2 z^2}{c^2} H_y^2 (1 - \beta^2) - m_0^2 c^2 \right) \psi = 0 \quad (28)$$

Для состояний с заданной энергией и импульсом уравнение (28) путем разделения переменных приводится к виду модели квантового гармонического осциллятора:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \chi'' + \frac{m_0 \omega^2}{2} z^2 \chi = \tilde{E} \chi, \quad \omega^2 = \frac{e^2 H_y^2}{m_0^2 c^2} (1 - \beta^2) \quad (29)$$

$$\tilde{E} = \frac{1}{2m_0} \left( \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - m_0^2 c^2 \right)$$

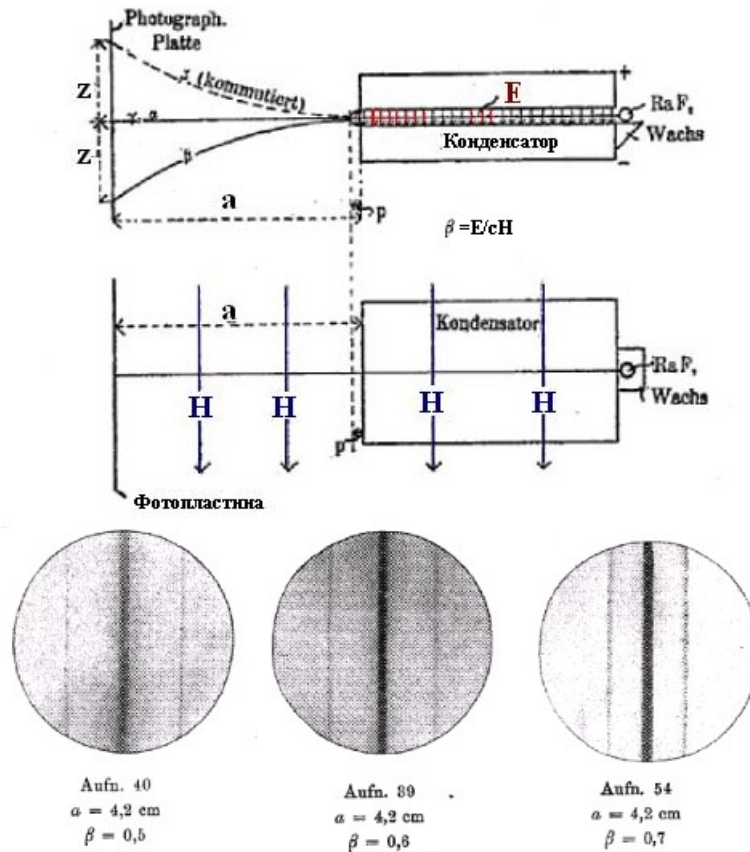


Рис. 4. Схема установки из работы [11]: электроны оставляют на фотопластинке узкие вертикальные полосы, соответствующие прямой или противоположной ориентации магнитного поля; гамма излучение и альфа частицы оставляют жирную среднюю полосу. Размеры конденсатора - 5x3x0,5 см, зазор — 0,2511 мм.



Собственные функции уравнения (29) имеют стандартный вид

$$\chi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m_0 \omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m_0 \omega z^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} z\right) \quad (30)$$

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

Собственные функции исходного уравнения (28) строятся на основе функций (30) и плоских волн (биспиноров) в виде /18/

$$\psi = \chi_n(z) \begin{pmatrix} \sqrt{E + m_e c^2} \hat{w} \\ (\mathbf{p} \hat{\sigma}) \hat{w} \\ \sqrt{E + m_e c^2} \end{pmatrix} \quad (31)$$

Здесь  $\hat{w}$  – произвольная двухкомпонентная величина, удовлетворяющая условию нормировки  $\hat{w}^* \hat{w} = 1$ .

Условие квантования уровней энергии в модели квантового осциллятора имеет вид

$$\tilde{E} = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда находим эффективную массу электрона, фигурирующую в правой части выражения (31), в виде

$$m_e = m_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} (2n + 1)}$$

Используя выражение частоты осцилляций (29), находим окончательно

$$m_e = m_0 \sqrt{1 + \frac{\hbar \omega_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{m_0 c^2} (2n + 1)}, \quad \omega_0 = \frac{e H_y}{m_0 c} \quad (32)$$

Эта формула заменяет выражение (23) в данной задаче.

Выражение (32) показывает, что эффективная масса больше, чем реальная масса электрона, причем этот эффект зависит от скорости и от дискретного

параметра, связанного с возбуждением квантовых осцилляций в магнитном поле. Интересной особенностью данной задачи является то, что электрон движется без ускорения в классическом смысле, поскольку действующая на частицу сила Лоренца равна нулю. Тем не менее, электрон испытывает взаимодействие с электромагнитным полем через векторный и скалярный потенциал. В результате этого взаимодействия электрон становится более тяжелым, т.е. приобретает электромагнитную массу, в полном соответствии с гипотезой Абрагама /6/.

### Квантование энергии электрона в однородном магнитном поле

Рассмотрим движение электрона в однородном магнитном поле, направленном вдоль оси Oz системы. Отметим, что существует точное решение этой задачи, как в рамках теории Дирака, так и в случае уравнения Клейна-Гордона /21/. Ниже дано решение, основанное на представлении о существовании классических орбит электронов в магнитном поле – см. /19-20/. В цилиндрической системе координат однородному магнитному полю соответствует векторный потенциал вида (ниже всюду полагаем  $B_z = H_z$ ) /23/:

$$\mathbf{A} = (0, A_\varphi, 0), \quad A_\varphi = \frac{rB_z}{2} \quad (33)$$

Отметим, что функция (1) удовлетворяет условию калибровки  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$  и является решением уравнения Лапласа

$$\Delta \mathbf{A} = 0.$$

В постоянном магнитном поле в классическом случае электроны движутся по круговым орбитам, радиус которых определяется из условия равновесия в форме уравнения

$$\frac{m v^2}{R} = e v B_z \quad (34)$$

Согласно теории Лоренца /2/ и Эйнштейна /8-9/, при повышении скорости поперечная масса электрона изменяется на релятивистский фактор:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{V}{c}$$

Уравнение, описывающее движение электрона в магнитном поле, выводится непосредственно из уравнения Дирака (24) или упрощенного уравнения (25):

$$\frac{1}{2m_0} (\hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A})^2 \psi = E_n \psi \quad (35)$$

Здесь  $E_n = (E^2 - m_0^2 c^4) / 2m_0 c^2$ .

Подставим выражение (33) в уравнение (35), в результате, с учетом выражения оператора импульса в цилиндрической системе координат, приходим к следующему уравнению /19-20/

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r + \frac{1}{r^2} \psi_{\varphi\varphi} + \psi_{zz} \right) + \frac{e^2 B_z^2 r^2}{8m_0} \psi + \frac{i\hbar e B_z}{4m_0} \psi_\varphi = E_n \psi \quad (36)$$

Будем искать решение уравнения (36) в виде функции

$$\psi = \frac{\chi(r)}{r^{1/2}} \exp(iM\varphi + ik_z z) \quad (37)$$

Подставляя выражение (37) в уравнение (36) и разделяя переменные, находим

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \chi'' - \frac{M_0^2}{r^2} \chi - k_z^2 \chi \right) + \frac{e^2 B_z^2 r^2}{8m_0} \chi - \frac{\hbar M e B_z}{4m_0} \chi = E_n \chi \quad (38)$$

Здесь  $M_0^2 = M^2 - 1/4$ .

Внешне уравнение (38) мало отличается от исследованного ранее в задаче Ландау о квантовых осцилляциях электрона в магнитном поле /22/. Нас

интересуют решения, для которых справедливо классическое уравнение (34). Метод получения этих решений был рассмотрен в работах /19-20/.

Введем новую переменную, описывающую отклонение электрона от классической траектории согласно  $r = R + \xi$ . Будем считать, что в своем движении электрон слабо отклоняется от классической траектории, т.е. справедливо соотношение  $\xi / R \ll 1$ . Разложим коэффициент уравнения (38) по степеням малого параметра  $\xi / R$ . Рассмотрим решения, симметричные относительно классической траектории. Удерживая только линейные и квадратичные слагаемые, находим условие симметрии волновой функции относительно классической траектории

$$\frac{\hbar^2 M_0^2}{2m_0 R^3} 2\xi - \frac{e^2 B_z^2}{8m_0} 2R\xi = 0 \quad (39)$$

Подставляя классическое условие равновесия сил (34) в уравнение (39), находим

$$\hbar^2 M_0^2 = \frac{(m v R)^2}{4} \quad (40)$$

Следовательно, для симметричной волновой функции классический момент в два раза больше квантового механического момента. При выполнении условия (40), уравнение (38) принимает вид, как в модели квантового гармонического осциллятора

$$-\frac{\hbar^2}{2m_0^2} \chi'' + \frac{m_0^2 \omega^2}{2} \xi^2 \chi = \tilde{E} \chi, \quad \omega^2 = \frac{e^2 B_z^2}{4m_0^2} + \frac{3\hbar^2 M_0^2}{m_0^2 R^4} \quad (41)$$

$$\tilde{E} = E_n - \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right) - \frac{(eB_z R)^2}{8m_0} + \frac{\hbar M e B_z}{4m_0}$$

С учетом условия равновесия (39) частота квантовых осцилляций совпадает с ее значением в задаче Ландау /22/

$$\omega^2 = \frac{e^2 B_z^2}{m_0^2} \quad (42)$$

Собственные функции уравнения (41) имеют стандартный вид /23/

$$\chi_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{m_0 \omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m_0 \omega \xi^2}{2\hbar}\right) H_n \left( \sqrt{\frac{m_0 \omega}{\hbar}} \xi \right) \quad (43)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Условие квантования уровней энергии можно представить в форме

$$E_n = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{M_0^2}{R^2} + k_z^2 \right) + \frac{(eB_z R)^2}{8m_0} - \frac{\hbar M e B_z}{4m_0} \quad (44)$$

Уравнение (44) можно использовать для оценки квантового числа возбуждения осцилляций электронов  $n$  при заданной начальной энергии электронов. Условие равновесия в форме (39) служит для определения квантового углового момента, величина которого, согласно данным /4-5, 11/, достигает значения  $M_0 \approx M \cong 10^{11}$  - см. /19-20/. При этом проекция квантового механического момента на направление магнитного поля может принимать как положительное, так и отрицательное значение, что описывается последним слагаемым в правой части уравнения (44). Классическому движению соответствует положительное значение проекции момента, т.к. электрон вращается против часовой стрелки в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля, следовательно, из уравнения (39), имеем

$$\hbar M \approx \hbar M_0 = -\frac{eB_z R^2}{2}, \quad e < 0 \quad (45)$$

Подставляя это выражение в уравнение (44) и учитывая зависимость момента от индукции магнитного поля в форме уравнения равновесия (39), а также определение параметра  $E_n = (E^2 - m_0^2 c^4) / 2m_0 c^2$  находим

$$E^2 - m_0^2 c^2 = \frac{3}{4} (ceB_z R)^2 + m_0 c^2 \hbar \omega (2n + 1) + c^2 p_z^2 \quad (46)$$

С другой стороны, в релятивистской механике выполняется дисперсионное соотношение

$$E^2 - m_0^2 c^2 = m^2 \mathbf{v}^2 c^2 = (ceB_z R)^2 + c^2 p_z^2 \quad (47)$$

Сравнивая (46) и (47), находим, что для выполнения дисперсионного соотношения должно быть

$$m_0 c^2 \hbar \omega (2n + 1) = \frac{1}{4} (ceB_z R)^2 \quad (48)$$

Согласно [18], уравнение (48) можно рассматривать как условие квантования орбиты электрона, однако в указанной монографии дана иная оценка квантового числа осцилляций

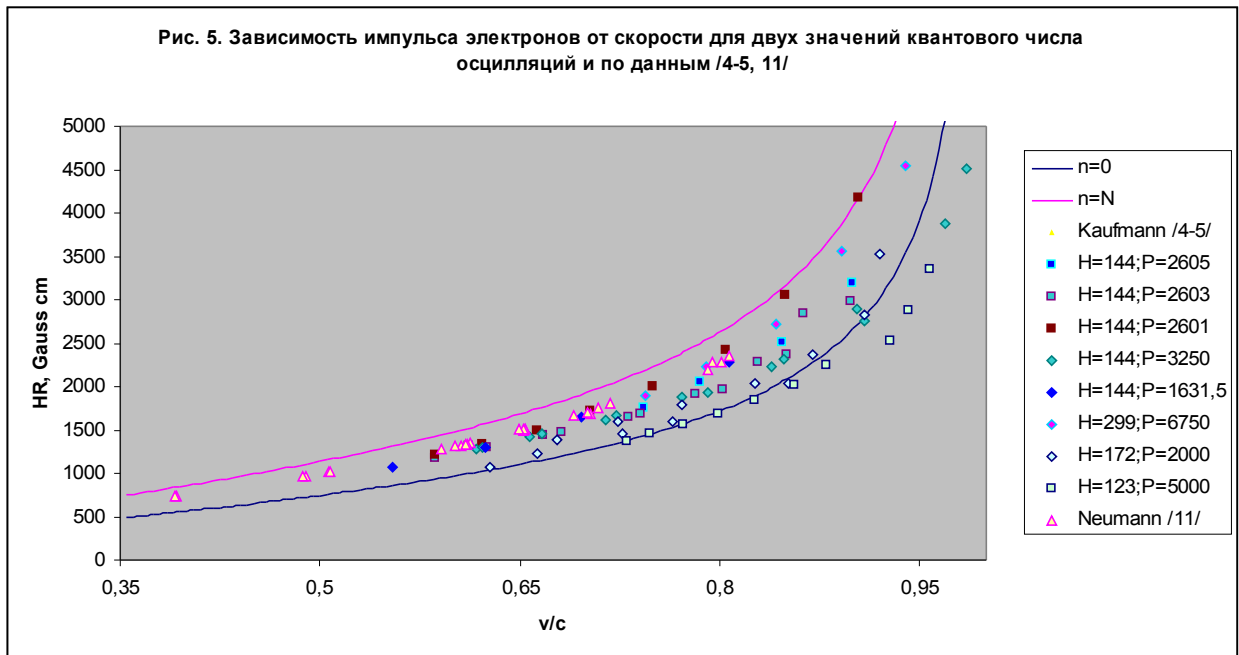
$$m_0 c^2 \hbar \omega (2n + 1) = (ceB_z R)^2 \quad (49)$$

Уравнение (49) можно рассматривать как верхнюю оценку квантового числа осцилляций, а условие (48) – как гипотетическую оценку, согласованную с теорией Лоренца-Эйнштейна. В общем случае положим

$$0 \leq n \leq N, \quad N = \frac{eB_z R^2}{2\hbar} - 1 \quad (50)$$

В таком случае дисперсионное соотношение (46) зависит от параметра (50), т.е. импульс зависит не только от скорости, но и от числа квантовых осцилляций электрона в магнитном поле. С учетом этого обстоятельства

данные /4-5, 11/ хорошо укладываются в полосу, задаваемую неравенствами (50) – рис. 5.



Опыты Кауфмана /4-5/ являются хорошей иллюстрацией эволюции взглядов на природу электрона. Первые эксперименты /4/, поставленные в 1901 г на исключительно простой установке – рис. 6, были посвящены проверке уравнения (10), которое получил von Searle в 1897 г /23/, рассматривая электрон как жесткую заряженную сферу в рамках модели Лоренца (1). Кауфман предполагал, что электромагнитная масса электрона определяется

из уравнения  $m = (1/\beta c^2)dE/d\beta$ , а общая масса включает еще и

массу, обусловленную структурой электрона. В результате первых экспериментов (данные /4/, полученные при напряженности магнитного поля 299 Gauss и напряжении на конденсаторе P=6750 Volt), Кауфман установил, что электромагнитная масса составляет приблизительно 1/4 от всей массы электрона. Отметим, что эти данные соответствуют теории Лоренца.

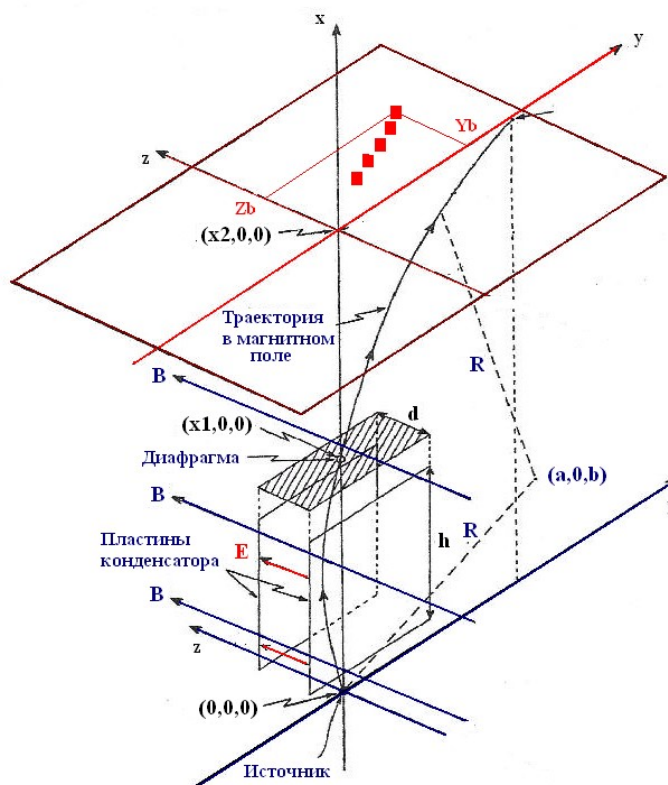


Рис. 6. Схема движения электрона в экспериментах Кауфмана /4-5/. Красными квадратами обозначен трек электронов. Параметры установки: /4/- высота конденсатора  $h=1,775$ ; зазор  $d=0,1525$  см; расстояние от источника до диафрагмы  $x_1=2,07$  см; расстояние от диафрагмы до фотопластинки  $x_2-x_1=2$  см; /5/- высота конденсатора  $h=1,4838$ ; зазор  $d=0,1242$  см; расстояние от источника до диафрагмы  $x_1=2,0048$  см; расстояние от диафрагмы до фотопластинки  $x_2-x_1=1,9693$  см

В последующих экспериментах /4/, осуществленных в 1902 г., Кауфман проверял гипотезу Абрагама /6/ об электромагнитном происхождении массы электрона с привлечением уравнения для поперечной массы (12). Эти данные, полученные при напряжении на конденсаторе  $P=2000; 5000$  Volt, хорошо соответствуют уравнению (46) при  $n=N$  – см. рис. 5.

Наконец, в 1906 г Кауфман подтвердил теорию Абрагама /6/, осуществив серию экспериментов /5/. Однако данные, полученные в этих экспериментах



при напряжении  $P=2601; 2603; 2605$  Volt, содержали слишком большое рассеяние – см. рис. 2-3, 5, необъяснимое с точки зрения классической электродинамики. Это вызвало множество вопросов, в частности, у Планка /10/. Возникло предположение, что в экспериментах /5/ напряжение было непостоянным, что повлияло на конечные результаты.

В действительности, однако, результаты экспериментов Кауфмана вполне достоверны, а рассеяние данных /4-5/ объясняется возбуждением осцилляций в магнитном поле, которые приводят к изменению энергии электронов вопреки законам классической электродинамики. Как следует из уравнения (46), это чисто квантовый эффект, для объяснения которого необходимо рассмотреть нестационарный процесс излучения и поглощения фотонов при движении электронов в *неоднородных* полях, обусловленных краевыми эффектами, что выходит за рамки настоящей работы. В этом смысле эксперименты /4-5, 11-13/ и другие можно рассматривать как подгонку под заранее известный результат, путем настройки установки на воспроизведение той или иной частоты квантовых осцилляций.

### Структура электрона

В классической электродинамике плотность заряда в правой части уравнений (1) является заданной функцией координат и времени. В случае электронов и других частиц, обладающих электрическим зарядом, движение центра масс во внешних полях подчиняется закону Ньютона, в котором влияние внешних полей учитывается посредством силы Лоренца. Однако распределение заряда вокруг центра масс остается неизвестным. Абрагам считал электрон жесткой проводящей сферой конечного радиуса с поверхностным распределением заряда, а Лоренц предполагал, что электрон испытывает деформацию в соответствии с уравнением /17/. В современной квантовой электродинамике используется гипотеза точечного заряда электрона. Зададимся вопросом, каким должно быть уравнение состояния электрона, чтобы решения системы уравнений (1) были совместны с уравнением (25)?

Для ответа на этот вопрос достаточно будет сравнить решения системы (1) с решениями уравнения (25). Для этого используем следующий прием. Как известно, пара решений системы (1) образует 4-вектор  $(\phi, \mathbf{A})$ . Составим из этих решений спинор по формуле (см. /18/)

$$\hat{\psi} = (\mathbf{A}\hat{\sigma}) + \phi\hat{\sigma}_0 \quad (51)$$

Здесь  $\hat{\sigma}_0$  - единичная матрица. Применим к обеим частям уравнения (51) слева оператор Даламбера, в результате, с учетом (1), получим

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \hat{\psi} = -\rho \left( \frac{(\mathbf{u}\hat{\sigma})}{c} + \hat{\sigma}_0 \right) \quad (52)$$

Потребуем, чтобы спинор (51) удовлетворял уравнению (25). Отсюда находим условие совместности двух систем – (1) и (25)

$$\rho\hat{\sigma}_0 = \left( -\frac{e}{\hbar^2 c^2} (\phi E - c(\mathbf{A}\mathbf{p})) + \frac{e^2}{\hbar^2 c^2} (\phi^2 - \mathbf{A}^2) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \left( (\mathbf{A}\hat{\sigma}) + \phi\hat{\sigma}_0 \right) \left( \frac{(\mathbf{u}\hat{\sigma})}{c} + \hat{\sigma}_0 \right)^{-1} \quad (53)$$

Поскольку в этом уравнении слева стоит единичная матрица, помноженная на скаляр, справа тоже должна быть единичная матрица, помноженная на скаляр, следовательно, необходимо потребовать, чтобы

$$\left( (\mathbf{A}\hat{\sigma}) + \phi\hat{\sigma}_0 \right) \left( \frac{(\mathbf{u}\hat{\sigma})}{c} + \hat{\sigma}_0 \right)^{-1} = \lambda\hat{\sigma}_0 \quad (54)$$

Это уравнение выполняется автоматически при условии, что векторный потенциал задан в виде решения Лоренца (2), т.е.

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{u}}{c} \phi$$

Отсюда находим, что  $\lambda = \phi$ . Подставляя выражение (54) в уравнение (53), приходим к уравнению, описывающему зависимость плотности от потенциала,

$$\rho = \left( \frac{e^2 \phi^2}{\hbar^2 c^2} (1 - \beta^2) - \frac{e\phi}{\hbar^2 c^2} (E - (\mathbf{u}\mathbf{p})) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi \quad (55)$$

Подставим уравнение состояния электрона в форме (55) в первое уравнение (1), имеем

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = - \left( \frac{e^2 \phi^2}{\hbar^2 c^2} (1 - \beta^2) - \frac{e\phi}{\hbar^2 c^2} (E - (\mathbf{u}\mathbf{p})) - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi \quad (56)$$

Полученное уравнение описывает распределение потенциала электрона, совместное с уравнением Дирака (25). Для нахождения потенциала электрона, движущегося с постоянной скоростью вдоль оси  $Ox$ , применим преобразование Лоренца в форме

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \Phi = \frac{e\phi}{m_0 c^2} \sqrt{1 - \beta^2} \quad (57)$$

В этом случае, заменяя в правой части уравнения (56) энергию и импульс по

формулам  $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$ , находим

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} (\Phi^2 - 1) \Phi \quad (58)$$

Как и следовало ожидать, структура электрона определяется комптоновской длиной волны  $L = \hbar / m_0 c$ . Уравнение (58) допускает решения со сферической симметрией. В этом случае оно имеет вид

$$\Phi_{\zeta\zeta} + \frac{2}{\zeta} \Phi_{\zeta} + (\Phi^2 - 1) \Phi = 0, \quad \zeta = \frac{m_0 c}{\hbar} \sqrt{x'^2 + y^2 + z^2} \quad (59)$$

Уравнение (59) не содержит никаких параметров, что указывает на универсальный механизм формирования структуры электрона и других заряженных частиц.

Уравнению (59) можно придать симметричную форму, положив  $\zeta = 1/\zeta'$ . В результате этой замены находим

$$\zeta'^4 \Phi'' + (\Phi^2 - 1)\Phi = 0 \quad (60)$$

Уравнение (60) имеет три особые точки:  $\Phi = 0; \pm 1$ . В окрестности каждой из этих точек  $\Phi'' = 0$ , следовательно,  $\Phi = \Phi_0 + a\zeta'$ , что соответствует кулоновскому потенциалу. Действительно, кулоновский потенциал  $\phi = e/r$ . В этом случае, согласно второму уравнению (56) и (59), имеем

$$\Phi = \frac{e^2}{m_0 c^2 r} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{e^2 \zeta'}{\hbar c} \sqrt{1 - \beta^2} = \alpha \zeta' \sqrt{1 - \beta^2}$$

Здесь обозначено  $\alpha \approx 1/137,035987$  - постоянная тонкой структуры. Следовательно, особая точка уравнения  $\Phi = 1$  достигается при

$r = R_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} \sqrt{1 - \beta^2}$ , т.е. примерно соответствует классическому радиусу электрона – см. (14).

Отметим, что потенциал электрона, движущегося с постоянной скоростью, не только сжимается в направлении движения в соответствии с преобразованием Лоренца (57), но и уменьшается характерный радиус

распределения, поскольку  $R_0 = \frac{e^2}{m_0 c^2} \sqrt{1 - \beta^2}$ . В пределе  $\beta \rightarrow 1$  заряд

электрона сжимается в точку в полном соответствии с гипотезой квантовой электродинамики.

Эти результаты позволяют понять, почему описанная структура электрона не наблюдается в современных экспериментах. Согласно существующим представлениям для наблюдения этой структуры необходимо разогнать

электроны до такой скорости, чтобы комптоновская длина волны была порядка характерного масштаба внутренней структуры электрона, т.е.

$$L = \hbar / mc = (\hbar / m_0 c) \sqrt{1 - \beta^2} \cong R_0 = (e^2 / m_0 c^2) \sqrt{1 - \beta^2}$$

Но это условие заведомо не выполняется, поскольку  $L/R_0 = 1/\alpha$  при любой скорости электрона. Следовательно, структуру электрона нельзя обнаружить в экспериментах, связанных с рассеянием частиц. С другой стороны, структура электрона проявляется на масштабах порядка  $L\alpha$ , т.е. на два порядка меньше, чем комптоновская длина волны. Поскольку же распределение заряда в неподвижном электроне является сферически симметричным, влияние структуры электрона на атомные оптические спектры связано с изменением его формы при движении с конечной скоростью. Но эти поправки на два порядка меньше, чем релятивистские поправки, вычисленные для точечного электрона, т.е. заведомо перекрываются радиационными поправками – см. /18/.

Поставим задачу для уравнения (60): на границе в особой точке задан кулоновский потенциал, определить потенциал во внутренней области, т.е. при начальных данных

$$\zeta' = 1/\alpha' : \Phi = 1, \quad \Phi' = \alpha' \quad (61)$$

где  $\alpha' = \alpha \sqrt{1 - \beta^2}$ , найти  $\Phi(\zeta')$  при  $\zeta' > 1/\alpha'$ .

Путем замены  $\eta = \zeta' \alpha'$  задача (60)-(61) приводится к виду

$$\eta^4 \Phi'' + \alpha'^2 (\Phi^2 - 1) \Phi = 0 \quad (62)$$

$$\eta = 1 : \Phi = 1, \quad \Phi_\eta = 1$$

Учитывая малую величину параметра  $\alpha' \ll 1$ , можно построить решение методом теории возмущений. В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= \eta - \alpha'^2 (\eta \ln \eta - 3\eta/2 - 1/2\eta + 2), \quad \eta > 1 \\ \Phi(\eta) &= \eta, \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (63)$$

Это решение показывает, что вблизи границы потенциал слабо отличается от начального кулоновского потенциала. Тем не менее, потенциал убывает во внутренней области электрона, достигая максимума в точке

$$\eta_0 \cong \exp(\alpha'^{-2})$$

Учитывая малую величину константы электромагнитного взаимодействия, находим, что это значение много меньше, чем длина Планка, т.е. электрон в этом приближении действительно является точкой.

Однако, кроме непрерывных на границе решений уравнения (62), можно рассмотреть разрывные решения, т.е. поставить следующую задачу

$$\begin{aligned} \eta^4 \Phi'' + \alpha'^2 (\Phi^2 - 1) \Phi &= 0 \\ \eta = 1: \quad \Phi &= 1, \quad \Phi_\eta = \gamma \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь  $\gamma$  - параметр, характеризующий структуру электрона. Если этот параметр не слишком велик, тогда решение задачи (64) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= \gamma\eta - \alpha'^2 \gamma^3 (\eta \ln \eta - \eta + 1) - \alpha'^2 \gamma (1/2\eta + \eta/2 - 1), \quad \eta > 1 \\ \Phi(\eta) &= \eta, \quad 0 < \eta < 1 \end{aligned} \quad (65)$$

Наличие дополнительного параметра позволяет переопределить точку, в которой достигается максимум потенциала,

$$\eta_0 \cong \exp(\gamma^{-2} \alpha'^{-2})$$

В частности, для классического радиуса электрона (14) имеем  $\eta_0 = 6\pi$ , откуда находим

$$\gamma = \frac{1}{\alpha \sqrt{(1 - \beta^2) \ln(6\pi)}} \quad (66)$$

При большом значении градиента теория возмущений может оказаться неприменимой, поэтому потребуются иное, например, численное решение. Среди всех решений задачи существует одно такое, что потенциал стремится к постоянной величине при  $\eta \rightarrow \infty$ . В результате возникает задача

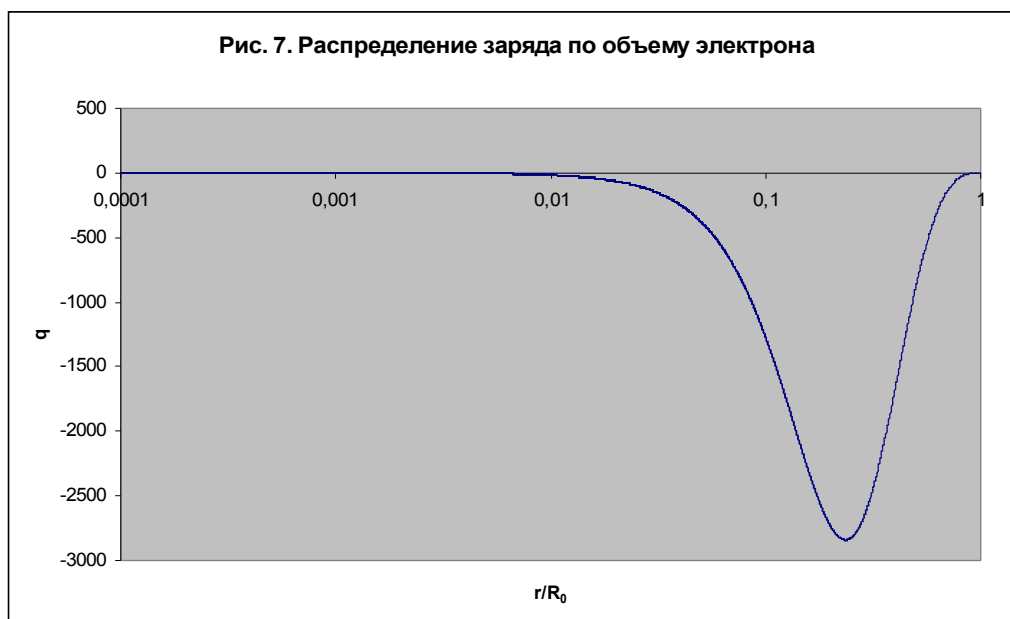
$$\eta^4 \Phi'' + \alpha'^2 (\Phi^2 - 1) \Phi = 0$$

$$\eta = 1: \Phi = 1,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \Phi(\eta) = \Phi_0 \quad (67)$$

Поскольку параметр  $\Phi_0$  заранее неизвестен, решение задачи (67) осуществляется методом пристрелки, т.е. сводится к задаче (64), в которой параметр  $\gamma$  подбирается таким образом, чтобы получить требуемое решение. Путем численных экспериментов было установлено, что решение задачи (64) сходится к решению задачи (67) при  $\gamma = 2/\alpha'$ .

Используя решение задачи (67), можно вычислить распределение заряда по объему электрона – рис. 7. Заряд в сферическом слое определяется согласно уравнению:  $4\pi\rho(\zeta)\zeta^2 d\zeta = qd\zeta$ . Распределение заряда растянуто на два порядка – см. рис. 7, поэтому электрон лишь очень грубо можно представить в виде сферы с поверхностным распределением заряда, как предполагалось в работах [2, 6]. Экстремум распределения заряда приходится на  $r/R_0 \approx 0,235$ . Отметим, что  $R_0 = 6\pi R_e \sqrt{1 - \beta^2}$ , поэтому уже при скорости  $\beta = 0,852$  заряд сжимается до размера классического радиуса.



Если в формулу Абрагама (13) подставить  $R_0$ , немедленно получим зависимость массы от скорости Лоренца-Эйнштейна (18). Это указывает на то, что развитую выше теорию можно использовать для вычисления электромагнитной массы электрона, замкнув тем самым теорию электронов Абрагама-Лоренца-Эйнштейна-Дирака.

## Литература

1. Lorentz, Hendrik Antoon. [La Théorie électromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants](#)// at the [Internet Archive](#), *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, **25**, 1892, 63–552.
2. Г.А. Лорентц. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. Москва, ГИТТЛ, 1953, 471 с.
3. J.J. Thomson. Carriers of Negative Electricity/Nobel Lecture, December 11, 1906, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1906/thomson-lecture.pdf](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1906/thomson-lecture.pdf)
4. Kaufmann, W. [Die magnetische und elektrische Ablenkbarkeit der Bequerelstrahlen und die scheinbare Masse der Elektronen](#)// *Göttinger Nachrichten* (2), 1901, 143–168.
5. Kaufmann, W. [Über die Konstitution des Elektrons](#)// *Annalen der Physik*, **19**, 1906, 487–553.
6. Max Abraham. [Prinzipien der Dynamik des Elektrons](#)// *Annalen der Physik*, **315** (1), 1903, 105–179.
7. Bucherer A. H. [Über den Einfluß der Erdbewegung auf die Intensität des Lichtes](#)// *Annalen der Physik*, **316** (6), 1903, 270–283.
8. Albert Einstein. [Zur Elektrodynamik bewegter Körper](#)// *Annalen der Physik*, **322** (10), 1905, 891–921.
9. Альберт Эйнштейн. О принципе относительности и его следствиях. Собрание научных трудов в четырех томах. Т.1. – М., Наука, 1965.
10. Max Planck. Die Kaufmannschen Messungen der Ablenkbarkeit der  $\beta$ -Strahlen in ihrer Bedeutung für die Dynamik der Elektronen// *Physikalische Zeitschrift*, 7, 1906, 753–761.
11. Neumann, Günther. Die träge Masse schnell bewegter Elektronen//*Annalen der Physik* 350 (20): 1914, 529–579. <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k153486.image.f542.pagination>
12. Ch. E. Guye et L a v a n c h y, Verification expérimentale de la forraule de L o r e n t z - E i n s t e i n par les rayons cathodiques de grande vitesse. *Arch, desSc Phys et Nat*. XLII, pp. 287, 353, 441; 1916.
13. Rogers, M. M. et al. A Determination of the Masses and Velocities of Three Radium B Beta-Particles, *Physical Review*, 57, 1940, 379–383.
14. Paul A.M. Dirac. Theory of Electrons and Positrons/Nobel Lecture, December 12, 1933, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1933/dirac-lecture.pdf](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/dirac-lecture.pdf)
15. Erwin Schrödinger. The Fundamental Idea of Wave Mechanics/Nobel Lecture, December 12, 1933, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1933/schrodinger-lecture.pdf](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1933/schrodinger-lecture.pdf)
16. Steven Weinberg. Conceptual Foundations of the Unified Theory of Weak and Electromagnetic Interactions/Nobel Lecture, December 8, 1979, [http://nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1979/weinberg-lecture.pdf](http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979/weinberg-lecture.pdf)
17. A. Garrett Lisi. An Exceptionally Simple Theory of Everything//arXiv:0711.0770v1, 6 Nov 2007.



18. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. IV/В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. – 3-е изд., испр. – М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1989, - 728 с.
19. Alexander P. Trunev. Существует ли экспериментальное подтверждение релятивистской теории Лоренца?// Chaos and Correlation, May 19, 2010, [http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR5\\_2010.pdf](http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR5_2010.pdf)
20. А. П. Трунев. Квантование энергии электронов в магнитном бета-спектрометре// Chaos and Correlation, May 19, 2010, [http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR7\\_2010.pdf](http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR7_2010.pdf)
21. А.А. Соколов, И.М. Тернов. Релятивистский электрон. - М.: Наука, Гл. Ред. Физ.-мат. Лит., 1974, - 392 с.
22. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 5. Квантовая механика. Ч. 1. Нерелятивистская теория. – М., ОГИЗ, 1948, - 567 с.
23. Von Searle. Phil. Mag. (5) 44, 340. 1897.