**Chaos and Correlation**
International Journal, June 10, 2013

# Проблема Била и квантовая статистика

*Alexander P. Trunev*
*A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада*

Обсуждается связь уравнения Била с квантовой статистикой.

Ключевые слова: ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ, КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА.

**QUANTUM STATISTICS AND THE BEAL CONJECTURE**

*Alexander P. Trunev*
*A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada*

The connection between the Beal's conjecture and quantum statistics is discussed.

Keywords: Number Theory, Quantum Statistics.

Проблема Била является обобщением последней теоремы Ферма [1]. В общем виде эта проблема формулируется следующим образом:

если A, B, C, x, y, z – целые положительные числа и

$$A^x + B^y = C^z, x, y, z > 2 \qquad (1)$$

то A,B,C имеют общий простой делитель.

Как известно, за решение проблемы Била объявлен приз в миллион долларов [2]. В настоящей работе установлена связь решений уравнения (1) с квантовыми статистиками Бозе и Ферми.

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из ряда подсистем, которые пронумеруем целым числом $j = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая подсистема характеризуется числом состояний $G_j$ и числом частиц $N_j$, которые находятся в этих состояниях и обладают энергией $\varepsilon_j$. Определим число возможных способов распределения $N_j$ частиц по $G_j$ состояниям. В случае статистики Ферми в каждом состоянии может находиться не более чем одна частица, поэтому число способов равно [3]

$$\Delta \Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!} \tag{2}$$

В случае статистики Бозе в каждом состоянии может находиться любое число частиц, следовательно, число способов равно [3]

$$\Delta \Gamma_j = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{N_j!(G_j - 1)!} \tag{3}$$

Энтропия, общее число частиц и энергия системы равны по определению

$$S = \sum_j \ln \Delta \Gamma_j, \, N = \sum_j N_j, \, E = \sum_j \varepsilon_j N_j \tag{4}$$

Найдем числа $n_j = N_j / G_j$, которые соответствуют экстремуму энтропии при условии постоянства общего числа частиц и энергии системы. Если число состояний и число частиц в каждой подсистеме достаточно велико, $N_j, G_j >> 1$, то можно воспользоваться приближенной формулой для логарифма факториала $\ln N_j! \approx N \ln(N/e)$. В этом случае выражение энтропии квантовых систем упрощается и принимает вид:

$$\begin{aligned} S_F &= -\sum_j G_j[n_j \ln n_j - (1 - n_j)\ln(1 - n_j)], \\ S_B &= \sum_j G_j[(1 + n_j)\ln(1 + n_j) - n_j \ln n_j] \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь первое выражение соответствует энтропии системы фермионов, а второе – системы бозонов.

Используя метод Лагранжа, составим функционал $S_k + \alpha N + \beta E$, где $\alpha, \beta$ - некоторые постоянные. Экстремум энтропии достигается при условии

$$\frac{\partial}{\partial n_j}(S_k + \alpha N + \beta E) = 0$$

Отсюда находим два типа распределения

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \varepsilon_j) \pm 1} \tag{6}$$

Отметим, что знак плюс соответствует распределению Ферми, а знак минус – распределению Бозе.

Положим, $n_j = A^x / C^z, \alpha + \beta \varepsilon_j = y \ln B - x \ln A$. В этих обозначениях уравнение (1) принимает вид

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \varepsilon_j) + 1} \tag{7}$$

Следовательно, доказана теорема 1: комбинация корней уравнения (1) $n_j(A, C, x, z) = A^x / C^z$ описывается распределением Ферми (7).

Положим $n_j = B^y / A^x, \alpha + \beta \varepsilon_j = z \ln C - y \ln B$. Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta \varepsilon_j) - 1} \tag{8}$$

Отсюда следует теорема 2: комбинация корней уравнения (1) $n_j(A, B, x, y) = B^y / A^x$ описывается распределением Бозе (8).

Таким образом, установлена связь уравнения (1) с квантовой статистикой.

**References**

1. R. Daniel Mauldin. A Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem// Notices of the AMS 44 (11): 1436-1439. 1997.

2. The Beal Prize, AMS, http://www.ams.org/profession/prizes-awards/ams-supported/beal-prize

3. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.