



КОСМОЛОГИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Обсуждается метрика неоднородной вращающейся Вселенной. Показано, что метрика должна быть универсальной, зависящая только от фундаментальных констант. Даны примеры универсальных метрик, получаемых в теории гравитации Эйнштейна. На основе решений уравнений Эйнштейна предложены универсальные метрики, описывающие свойства неоднородной вращающейся Вселенной.

Ключевые слова: геометрия пространства-времени, общая теория относительности, космология.

COSMOLOGY OF INHOMOGENEOUS ROTATING UNIVERSE

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

Discussed metric inhomogeneous rotating universe. It is shown that the metric should be universal, depending only on the fundamental constants. There are examples of universal metrics obtained in Einstein's theory of gravitation. On the basis of solutions of the Einstein equation proposed universal metric describing the properties of an inhomogeneous rotating universe.

Keywords: space-time geometry, general relativity, cosmology.

Введение

Общая теория относительности /1-3/ широко используется в современной космологии, особенно, в связи с открытием ускоренного расширения Вселенной /4/. Эйнштейн так определил принципы теории относительности /2/: «Теория, как мне кажется сегодня, покоится на трех основных положениях, которые ни в какой степени не зависят друг от друга. Ниже они будут коротко сформулированы, а в дальнейшем освещены с некоторых сторон.

а) Принцип относительности: законы природы являются лишь высказываниями о пространственно-временных совпадениях; поэтому они находят свое естественное выражение в общековариантных уравнениях.

б) Принцип эквивалентности: инерция и тяжесть тождественны; отсюда и из результатов специальной теории относительности неизбежно следует, что симметричный «фундаментальный тензор» ($g_{\mu\nu}$) определяет метрические свойства пространства, движение тел по инерции в нем, а также и действие гравитации. Описываемое фундаментальным тензором состояние пространства мы будем обозначать как «G-поле».

в) Принцип Маха: G-поле полностью определено массами тел. Масса и энергия, согласно следствиям специальной теории относительности, представляют собой одно и то же; формально энергия описывается симметричным тензором энергии; это означает, что G-поле обуславливается и определяется тензором энергии материи».

Здесь первые два положения – принцип относительности и принцип эквивалентности, видимо, являются универсальными, тогда как принцип Маха, очевидно, не может быть непосредственно реализован в построении геометрии в силу неопределенности самого понятия материи, которую следует определить, например, в рамках теории геометродинамики /5-8/.

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /1/:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

$R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, $T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ , G , c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно. Отметим, что в общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} R_{ik} &= R_{jk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha} &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^{\alpha}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}}{\partial x^{\delta}} + \Gamma_{\beta\delta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\delta}^{\alpha}, \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Как известно, Эйнштейн предложил в 1912-1955 гг. несколько альтернативных теорий гравитации, среди которых теория (1) получила всеобщее признание. Множество споров вызывала космологическая постоянная, введенная Эйнштейном в 1917 г в работе /1/ для объяснения существования статической Вселенной. Однако в 1922 г Фридман получил решение, описывающие нестационарную Вселенную, на основе уравнений общей теории относительности, предложенных Эйнштейном в 1915 г, в которых $\Lambda = 0$. В 1929 г Хаббл экспериментально обнаружил разбегание галактик и сформулировал закон, связывающий расстояние до галактик с красным смещением. Эти результаты явились подтверждением модели Фридмана, после чего Эйнштейн опубликовал статью /3/, в которой написал, что «При этих обстоятельствах следует задать вопрос, можно ли описать опытные факты; не вводя Λ -член, явно неудовлетворительный с теоретической точки зрения».

В настоящее же время, учитывая многочисленные данные, свидетельствующие об ускоренном расширении Вселенной, следует признать, что Λ -член является вполне удовлетворительным и, более того, единственным разумным объяснением наблюдаемого эффекта. Однако происхождение этого эффекта относится к одной из самых больших загадок современной физики /9-13/. Действительно, это слагаемое могло бы возникнуть как следствие квантовых флуктуаций, но соответствующие оценки показывают, что существует огромное различие, составляющее 120 порядков между экспериментальной величиной Λ и предсказанием квантовой теории гравитации. Это различие можно несколько сократить, используя различные соображения /9/, но нельзя устранить.

Отмеченное огромное различие между фактами и теорией означает, что между геометрией микромира и геометрией в масштабе всей Вселенной нет никакой связи. Но тогда и принцип Маха, и следующее из него уравнение Эйнштейна (1) теряют свой смысл /14/. Чтобы разрешить это противоречие, был сформулирован **Принцип максимальной определенности**: *Метрика пространства-времени зависит только от таких фундаментальных констант, которые определяются с максимально возможной точностью.*

Отметим, что в современной физике к таким константам относятся скорость света, постоянная Планка, постоянная тонкой структуры, масса электрона, масса протона и некоторые другие величины. Тензор энергии импульса материи имеет сравнительно низкую точность определения, а с учетом большого содержания темной материи в наблюдаемой Вселенной, вообще не определен, поэтому не может входить в число параметров, от которых зависит метрика пространства-времени.

Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна и при этом удовлетворить принципу максимальной определенности, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \lambda g_{\mu\nu} &= 0 \\ g_{\mu\nu}(\Lambda + \lambda) + \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь λ – некоторая функция, зависящая от фундаментальных констант доступных измерению с максимально возможной точностью. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике.

При таком подходе отпадает необходимость строить гипотезы относительно распределения массы и энергии во Вселенной. Основой всех наблюдаемых феноменов является метрика, которой соответствует распределение массы и энергии, определяемое из второго уравнения (2). Метрика зависит только от фундаментальных констант, а распределение массы и энергии полностью определяется геометрией, что согласуется с механизмом возникновения массы и в стандартной модели, и в квантовой теории гравитации. Очевидно, что нет необходимости выводить этот механизм из каких-то других физических явлений, так как все эти явления уже отражены в метрике пространства-времени, которое является не только ареной всех событий, но и их причиной и следствием /5-8/. Материя в модели (2) является пассивной компонентой, наличие которой не является обязательным. Это можно сравнить с течением подкрашенной воды, в котором краска является пассивной компонентой, позволяющей осуществлять визуализацию движения, но не влияющей на движение /14-16/.

В работах /15-16/ на основе аксиально-симметрических решений модели (3) была построена метрика местного суперкластера. В настоящей работе рассмотрена модель неоднородной вращающейся Вселенной. Мы использовали основные идеи работ /17-21/ для нахождения решений первого уравнения (3), согласующихся со стандартной космологической моделью без использования гипотез о распределении материи и энергии. Это достигается за счет специального выбора метрики, описывающей неоднородную вращающуюся Вселенную.

Метрика неоднородной вращающейся Вселенной

Для моделирования вращения Вселенной мы используем метрику /21/, модифицированную с учетом разделения угловых переменных и расстояния до объектов в виде

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dt^2 + 2b(t,r)dtdr - a^2(t,r)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= 1, g_{11} = -a^2(t,r), g_{01} = g_{10} = b(t,r) \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2 \vartheta
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $a = a(t,r)$, $b = b(t,r)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Такой выбор метрики обусловлен, прежде всего, тем, что в современной астрофизике нет никакого достоверного метода определения расстояний в масштабе наблюдаемой Вселенной. Сферическая система координат, используемая для составления астрономических каталогов, определена на единичной сфере, а расстояние до объектов является некоторым функционалом, зависящим от используемых физических моделей /22-23/, а не от координат.

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (4) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= 1 \\
 G_{01} &= G_{10} = b(t,r) \\
 G_{11} &= -a^2(t,r) \\
 G_{22} \sin^2 \vartheta &= G_{33} \\
 G_{22} &= \frac{bb_t(b_r + aa_t) - b^2(a_t^2 + b_{rr} + aa_{tt}) + aa_r b_t - a^2(b_{rr} + aa_{tt})}{(a^2 + b^2)^2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\lambda g_{\alpha\beta}$, находим уравнения поля. Из первых трех выражений (5) и из вида метрического тензора следует, что в метрике (4) параметр $\lambda = -1$. Следовательно, скалярная кривизна исследуемых

пространств Эйнштейна является отрицательной, $R = -4$. Параметр скалярной кривизны является в метрике (4) математическим параметром, а не физическим, как и сигнатура метрики.

Из двух функций $a = a(t, r)$, $b = b(t, r)$ только одна может быть определена из уравнений поля, тогда как другая должна быть задана. Без ограничения общности рассмотрим два случая:

1) $b = const$, тогда, полагая $G_{22} = -1$, находим, что

$$\frac{b^2 a_t^2 + (a^2 + b^2) a a_{tt}}{(a^2 + b^2)^2} = 1; \quad (6)$$

2) $a = b$, тогда уравнение $G_{22} = -1$ приводится к виду

$$\frac{-b_t b_r + b b_{tr} + b^2 b_{tt}}{2b^3} = 1 \quad (7)$$

Уравнение (6) описывает Вселенную с заданным параметром вращения. Его общее решение в случае расширяющейся Вселенной имеет вид

$$a = \frac{e^{t-t_0}}{2} \sqrt{a_0^2 - 2a_0 b^2 + b^4 + e^{-4t-4t_0} - 2(b^2 + a_0) e^{-2t-2t_0}} \quad (8)$$

Здесь a_0, t_0 произвольные функции, зависящие от радиальной координаты.

Уравнение (7) описывает неоднородную вращающуюся Вселенную. Полагая $b = b(x)$, $x = t \pm r$, находим, что уравнение (7) распадается на два

$$\frac{\mp b'^2 \pm b b'' + b^2 b''}{2b^3} = 1 \quad (9)$$

Интегрируя уравнение (9), получим

$$b'^2 = \frac{2b^2(b_0^2 \pm 2b + b^2)}{(b \pm 1)^2} \quad (10)$$

Решение уравнения (10) можно представить в неявном виде

$$\begin{aligned} \sqrt{2}b_0(t \pm r) = & \pm \ln b + b_0 \ln \left(1 \pm b \mp \sqrt{b^2 \pm 2b + b_0^2} \right) \\ & \mp \ln \left(\pm b + b_0^2 + b_0 \sqrt{b^2 \pm 2b + b_0^2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Полученные решения (8) и (11) позволяют объяснить большую часть фактов, касающихся происхождения и развития Вселенной, не прибегая к гипотезе о влиянии материи на метрику пространства-времени. Отметим, что в модели (8) Вселенная может проходить через стадию сжатия без точки сингулярности – рис. 1. После прохождения стадии сжатия Вселенная распадается на две части, отличающиеся знаком параметра вращения. Этот сценарий развития Вселенной приводит к тому, что в наблюдаемой Вселенной преобладает вещество, а не антивещество. Если же Вселенная при сжатии проходит через сингулярную точку, то при расширении Вселенная распадается на три острова – рис. 1.

Метрика пространства-времени и скалярные волны

Покажем, как можно построить физику волновых процессов, используя метрику типа (4). Рассмотрим метрику вида

$$\begin{aligned} ds^2 = & \psi(t, r)dt^2 + 2bdt dr - \psi(t, r)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2 \\ g_{00} = & \psi(t, r), g_{11} = -\psi(t, r), g_{01} = g_{10} = b \\ g_{02} = & g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\ g_{22} = & -1, g_{33} = -\sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (12)$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (12) имеют вид

$$\begin{aligned} G_{00} &= \psi(t, r), G_{01} = G_{10} = b, \\ G_{11} &= -\psi(t, r), G_{22} \sin^2 \vartheta = G_{33}, \\ G_{22} &= \frac{\psi(\psi_t^2 - \psi_r^2) - (b^2 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{rr})}{2(\psi^2 + b^2)^2} \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая $G_{22} = -1$, находим волновое уравнение для определения метрики

$$\frac{\psi(\psi_t^2 - \psi_r^2) - (b^2 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{rr})}{2(\psi^2 + b^2)^2} = -1 \quad (14)$$

В рамках модели (14) можно решить задачу о распаде скопления галактик. Зададим метрику в начальном состоянии в виде нормального распределения по радиальной координате. Тогда в силу уравнения (14) со временем кластер расширяется по закону Хаббла, распадаясь при этом на отдельные кластеры, образующие гало, которые соответствуют гребням возникающих нелинейных волн – рис. 2. Этот распад зависит от величины параметра b . При малой величине $b < 0.2$ скопление распадается на три, пять и более кластеров, а при большой величине $b \approx 1$ скопление сохраняет свою первоначальную форму.

Следовательно, вращение стабилизирует Вселенную, сохраняя ее целостность, тогда как в отсутствии вращения Вселенная со временем распадается на отдельные фрагменты, что обусловлено скалярными волнами. Заметим, что такого типа скалярные волны могут быть ответственными за образование отдельных галактик и даже элементарных частиц, например, скалярных бозонов. Действительно, уравнение (14) не содержит никаких масштабных параметров, кроме времени и координаты, масштабы которых могут быть выбраны произвольно.

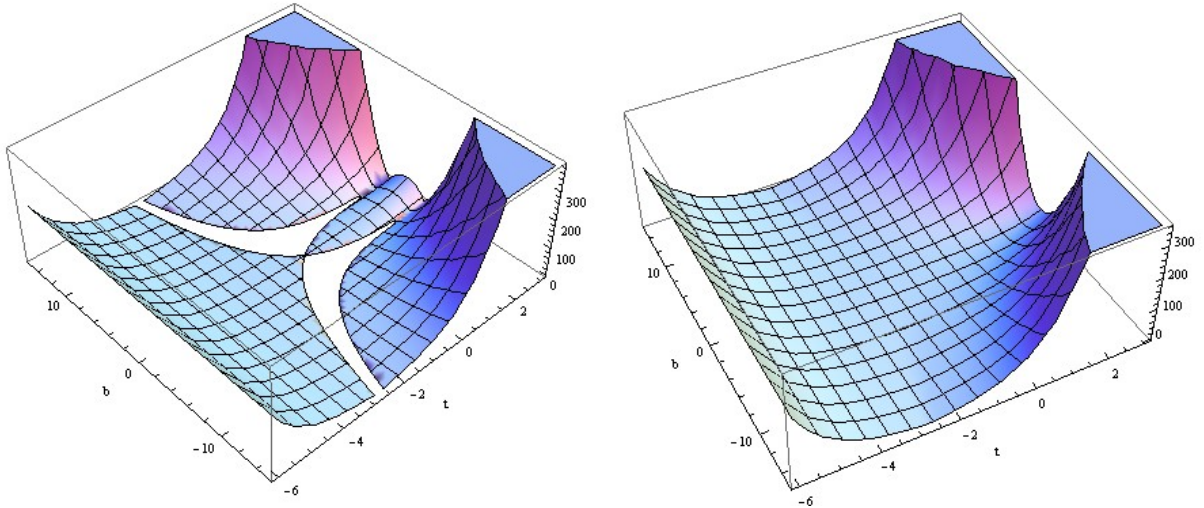


Рис. 1. Два сценария прохождения Вселенной через стадию сжатия: с сингулярностью (слева) и без сингулярности (справа).

Метрика пространства времени и коллапс

Метрика (12) не является единственно возможной при организации движения материи. Очевидно, что волны, скорость распространения которых ограничена, не могут быть преобладающей формой движения в большом масштабе. Рассмотрим еще одну метрику, связанную с вращением Вселенной

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \psi(t,r)dt^2 + 2bdt dr - dr^2/\psi(t,r) - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= \psi(t,r), g_{11} = -1/\psi(t,r), g_{01} = g_{10} = b \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Вычисляя отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (15), находим

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \psi(t,r), G_{01} = G_{10} = b, \\
 G_{11} &= -1/\psi(t,r), G_{22} \sin^2\vartheta = G_{33}, \\
 G_{22} &= \frac{-2\psi_t^2 + \psi\psi_{tt} + \psi^3\psi_{rr}}{2(1+b^2)\psi^3}
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

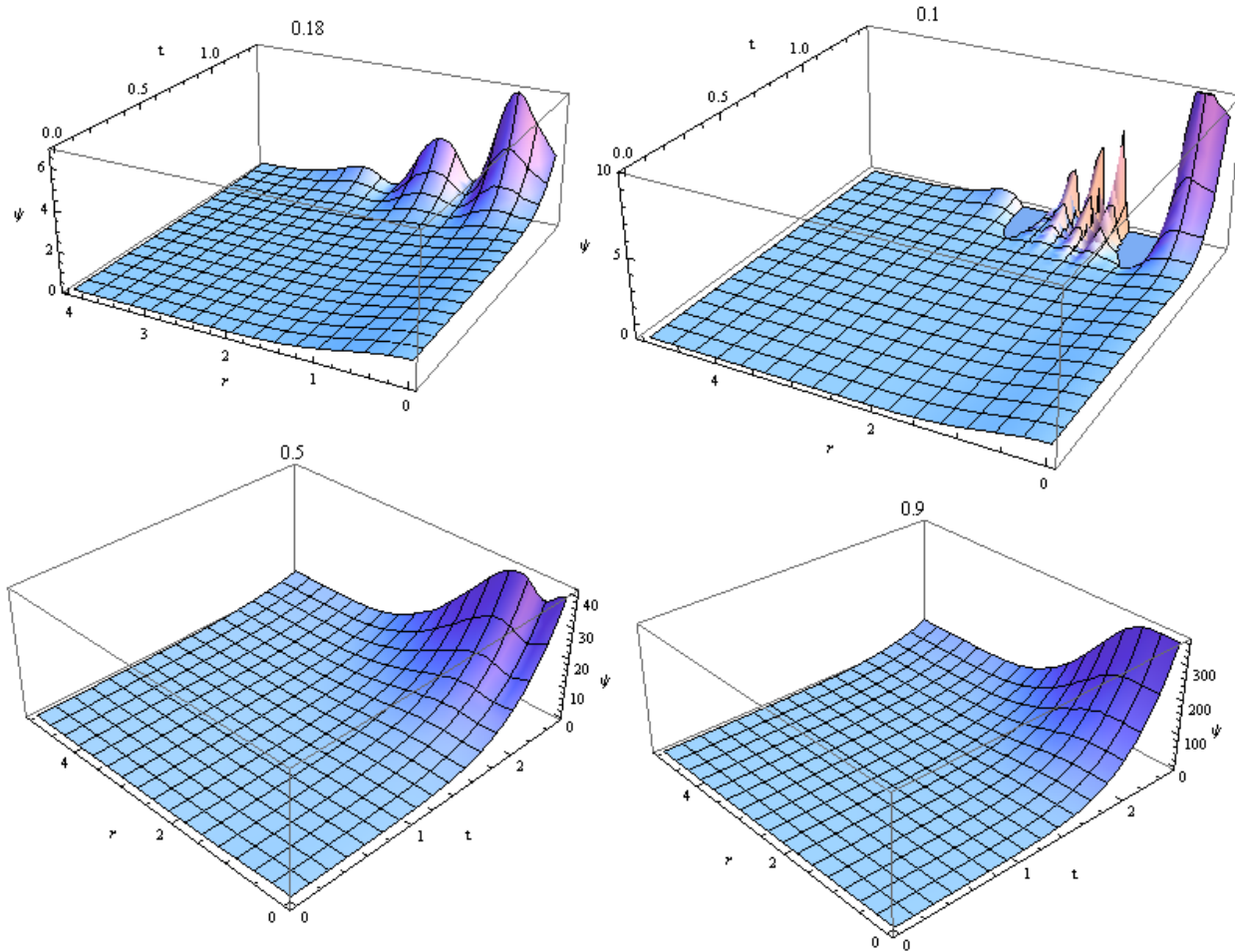


Рис. 2. Распад скопления на ряд кластеров в модели (14): над рисунками указана величина параметра b .

Используя уравнение $G_{22} = -1$, имеем

$$\psi \psi_{tt} + \psi^3 \psi_{rr} = -2(1 + b^2)\psi^3 + 2\psi_t^2 \quad (17)$$

В случае статической метрики положим $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, тогда, интегрируя уравнение (17), находим, что

$$\psi = 1 + kr - (1 + b^2)r^2 \quad (18)$$

Потенциал (18) можно сравнить со статическим гравитационным полем, связанным с жестким вращением системы координат с угловой скоростью Ω . В этом случае метрика приводится к виду /24/

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2 r^2) dt^2 - 2\Omega r^2 dt d\phi - dr^2 - dz^2 - r^2 d\phi^2 \quad (19)$$

Сравнивая метрику (19) и (15) в случае статического поля (18), находим, что параметр b действительно связан с угловой скоростью Ω . Как известно, квадратичный потенциал (18) приводит к разбеганию галактик по закону Хаббла /15-16/. Следовательно, закон Хаббла обусловлен наличием вращения Метагалактики как целого.

Отметим, что уравнение (17) является уравнением эллиптического типа, что означает зависимость решения от граничных условий не только в прошлом, но и в будущем. Вопрос о граничных условиях для уравнения (1) обсуждался самим Эйнштейном /1/, который пришел к выводу, что Вселенная представляет собой замкнутый сферический мир. Другая точка зрения содержится в монографии /25/, автор которой предположил, что имеется только три типа полей тяготения, и что для каждого типа существуют свои граничные условия.

В этой связи заметим, что потенциал (18) очевидным образом связан с решением Шварцшильда /26/, описывающим гравитационное поле точечной массы, и решением Коттлера /27/, являющимся обобщением решения Шварцшильда. Решение Шварцшильда обычно используется для доказательства гравитационного коллапса сферического тела /24/, хотя против возможности неограниченного сжатия вещества возражали и сам Шварцшильд, и Эйнштейн /28/. Тем не менее, коллапс и черные дыры составляют значительную часть современных исследований в области

астрофизики. Поэтому уравнение (17) можно рассматривать как модель явления коллапса сферического вращающегося тела.

Обычно предполагается, что черные дыры представляют собой статические образования, взаимодействующие с внешним миром посредством гравитационного поля. Однако уравнение (17) показывает, что черная дыра, если она существует, должна быть замкнута не только в пространстве, но и во времени. Следовательно, дыра, если она возникла в некоторый момент времени в результате коллапса, должна иметь конечную протяженность во времени, так как уравнение (17) имеет эллиптический тип. Действительно, рассмотрим решение уравнения (17), зависящее только от времени. Положим $\psi_{rr} = 0$, тогда уравнение (17) приводится к виду

$$\psi \psi_{tt} = -2(1 + b^2)\psi^3 + 2\psi_t^2 \quad (20)$$

Уравнение (20) можно проинтегрировать в общем случае, в результате находим

$$\psi(t) = \frac{4(1 + b^2)}{4(1 + b^2)^2(t - t_0)^2 + C_0} \quad (21)$$

Полученное решение (21) описывает объект, локализованный вокруг момента времени $t = t_0$, что и требовалось доказать.

В общем случае решение задачи о метрике объекта, локализованного в пространстве и во времени зависит от граничных условий. Так, например, распад скопления в случае метрики (15) приводит к образованию гало вокруг центрального ядра, но все скопление существует конечное время, то есть локализовано во времени – рис. 3. Возможно, что объекты такого типа производят так называемые гамма-всплески [29].

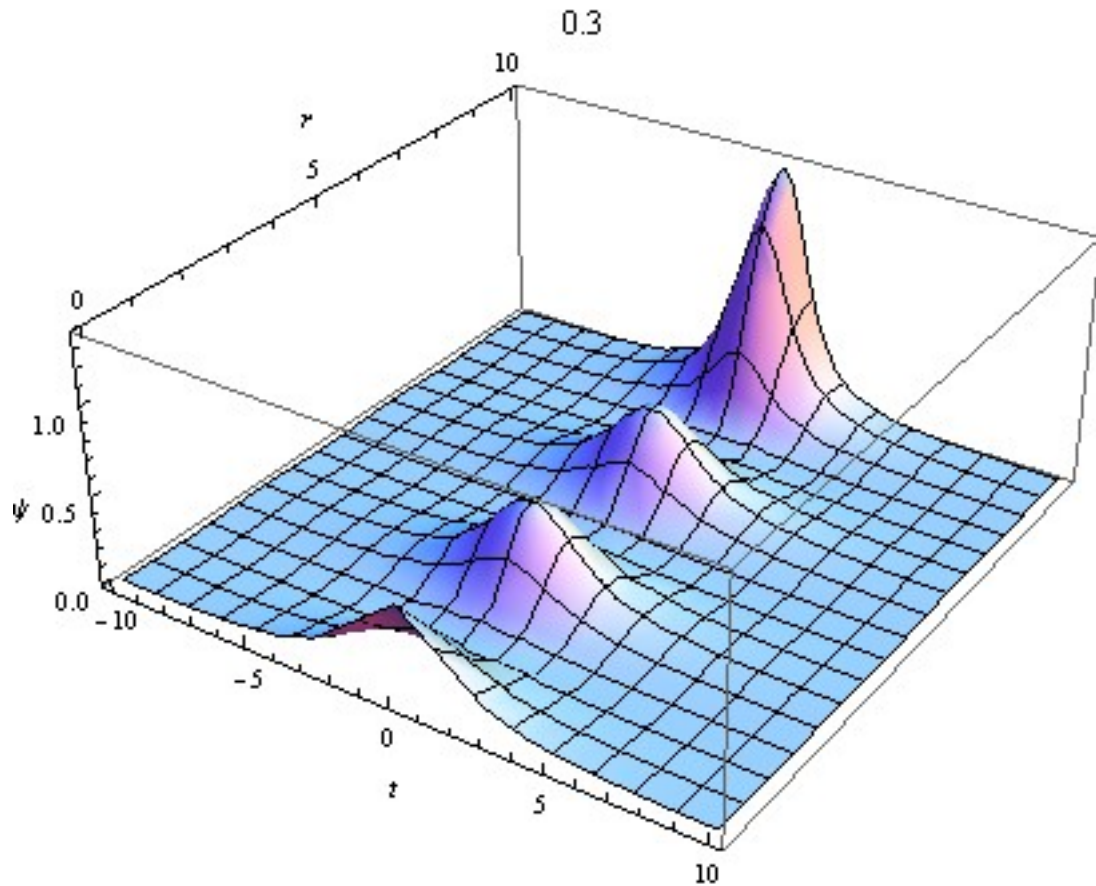


Рис. 3. Объект и гало локализованные во времени.

Наконец, заметим, что исследованные метрики вращающейся неоднородной Вселенной были построены на основе модели (3), в которой материя не влияет на геометрию пространства-времени. Однако эти результаты остаются справедливыми и в исходной модели Эйнштейна (1), в которой тензор энергии-импульса материи совпадает с метрическим тензором.

Библиографический список

1. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 601.
2. Einstein A. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 613.
3. Einstein A. Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 235—237; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 349.
4. Adam G. Riess *et al.* Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and Cosmological Constant// arXiv: astro-ph/ 9805201, 15 May, 1998.
5. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion // Ann. Math., 39,65-100, 1938.
6. C. Misner and J. Wheeler. Classical Physics as Geometry // Ann. of Phys., 2, No. 6, 525—603, 1957.
7. Wheeler, J. A. On the Nature of Quantum Geometrodynamics// Annals of Physics 2, No, 6 (Dec 1957): 604 – 614.
8. John A Wheeler. Neutrinos, Gravitation, and Geometry/ In Rendiconti della Scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi." Corso XI, by L. A.Radicati. Bologna: Zanichelli, 1960, 67 – 196.
9. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.
10. Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.
11. F. J. Amaral Vieira. Conceptual Problems in Cosmology//arXiv:1110.5634v1 [physics.hist-ph] 25 Oct 2011
12. S.E. Rugh and H. Zinkernagel. The Quantum Vacuum and the Cosmological Constant Problem//Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 33(4), 2002.
13. C.P. Burgess. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013
14. Трунев А.П. Метрика виртуальных миров // Научный журнал КубГАУ, 2013. – №09(093). С. 1569 – 1589. – IDA [article ID]: 0931309109. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/109.pdf>
15. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности // Научный журнал КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
16. Alexander P. Trunev. General relativity and the metric of the local group of superclusters// Chaos and Correlation, December 27, 2013.
17. Delsarte J. Sur les ds^2 d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds^2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.
18. Gödel K. An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation// Rev. Mod. Phys. 21,447, 1949.
19. P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models//Comm. Math. Phys. Volume 41, Number 1 (1975), 55-64.

20. Anthony Walters & Charles Hellaby. Constructing Realistic Szekeres Models from Initial and Final Data// arXiv:1211.2110v1 [gr-qc] 9 Nov 2012.
21. G. Scharf. Inhomogeneous cosmology in the cosmic rest frame// arXiv:1312.2695v2 [astro-ph.CO] 13 Dec 2013.
22. Distances//arXiv: 1309.5382v1 [astro-ph.CO] 20 Sep 2013.
23. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
24. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1971). The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1.
25. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
26. K. Schwarzschild. Uber das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv:physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
27. Kottler F. Uber die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie// Ann. Phys. 4, 56, 1918.
28. A. Einstein. On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of many Gravitating Masses// Ann. Math. 40, 922-936, 1939.
29. Fishman, C.J. and Meegan, C.A. Gamma-Ray Bursts// Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 33, 415–458, 1995.