Chaos and Correlation
International Journal, January 31, 2015

РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ И ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

В работе обсуждается единая теория поля Римана и ее расширение в 6D в общей теории относительности Эйнштейна. Показано, что в 6D возможно движение на двух сферах в форме нелинейных волн.
Ключевые слова: ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ, ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ, КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ, РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ, ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА, ТЕМНАЯ МАТЕРИЯ, ТЕМНАЯ ЭНЕРГИЯ.

RIEMANNIAN GEOMETRY AND UNITARY FIELD THEORY

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

The paper we discuss the unified field theory by Riemann and its extension in 6D in the general relativity. It is shown that in 6D possible movement on two spherical areas in the form of nonlinear waves.
Keywords: GENERAL RELATIVITY, GRAVITATIONAL WAVES, BLACK ENERGY, BLACK MATTER, QUANTUM THEORY, RIEMANNIAN GEOMETRY, UNITARY FIELD THEORY.

Введение

Построение единой теории поля является одной из проблем физики элементарных частиц. Декарт [1] рассматривал механическое движение как основу всякого другого движения, поэтому под единым полем иногда понимают отображение различных форм движения материи в пространстве и времени в форме механического движения [2-3]. В качестве примера можно привести единую теорию поля Римана [2] и теорию электромагнитного поля Максвелла [3]. Оба они использовал модели механики сплошной среды для описания электрических, магнитных и оптических явлений в рамках одной теории.

Исторически Риман [2] был первым, кто предвидел связь электродинамики с оптикой и с гравитацией. Еще в 1853 г, за 12 лет до выхода основополагающей работы Максвелла «Динамическая теория электромагнитного поля» [3], Риман предложил единую теорию поля, которая объединяла теорию гравитации Ньютона и основные законы электродинамики, электромагнетизма и оптики известные в то время. Эта теория включала в себя волновое уравнение для векторного потенциала и уравнение Пуассона, описывающее гравитационный потенциал и кулоновское поле электрических зарядов.

В 1858 году Риман представил Геттингенскому научному обществу доклад «По поводу электродинамики», в которой рассмотрел вариант теории электродинамики, включающей волновое уравнение для скалярного потенциала и некоторую совокупность гипотез относительно движения зарядов. Риман показал, что используя только запаздывающие потенциалы можно вывести закон, описывающий взаимодействие токов. Эта теория, однако, подверглась критике со стороны Клаузиуса (см. Примечания [2]), поэтому не была опубликована при жизни ее автора.

После создания общей теории относительности Эйнштейна [4] большое число публикаций было посвящено объединению гравитации и электромагнетизма в рамках одной метрической теории [4-11]. С середины 20 века и до наших дней под единой теорией поля понимают единую теорию материи [11-16], призванную объяснить свойства элементарных частиц.

В настоящей работе мы рассматриваем единую теорию поля, в которой использована модель электрических зарядов определенных в римановом пространстве с сигнатурой метрики $(+,+,+,-,-,-)$. Соответствующая метрика была получена в рамках общей теории относительности в [17-18].

Единая теория поля Римана

В 1853 году Риман [2] разработал теорию, которая объединяла гравитационное и электромагнитное взаимодействия. Риман предполагал, что пространство наполнено некой материей, которая непрерывно устремляется в атомы и там исчезает из осязаемого мира. При этом весомые тела, состоящие из атомов, являются местом соприкосновения осязаемого и неосязаемого миров. Скорость субстанции представляется, как сумма потенциального течения, обусловленного гравитацией и вихревого движения, обусловленного электромагнитным взаимодействием:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \tag{1}$$

Основные уравнения теории Римана сводятся к волновому уравнению, описывающему векторный потенциал и к уравнению Пуассона для скалярного потенциала:

$$\begin{aligned} &\nabla^2 V = -4\pi dm, \\ &\nabla V = \mathbf{u}, \quad \nabla \times \mathbf{u} = 0, \\ &\nabla \cdot \mathbf{w} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{2}$$

В пустом пространстве уравнения (2) принимают вид

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w} \\ &\left(\partial_t^2 - c^2 \nabla^2\right)(\nabla \times \mathbf{v}) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Отметим, что эти уравнения были получены дедуктивным путем из предположения о поглощении субстанции атомами вещества. Риман предложил вариационный принцип и функционал действия системы (используется правило суммирования Эйнштейна по повторяющимся индексам):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\eta}}{\partial t}\right)^2 - c^2 (\nabla \times \boldsymbol{\eta})^2\right] dx_1 dx_2 dx_3 dt \\ &+ \int V \left(\frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_i \partial t} dx_1 dx_2 dx_3 + 4\pi dm\right) dt + 2\pi \int dm \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\right)^2 dt \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь обозначено $\partial \boldsymbol{\eta} / \partial t = \mathbf{v}$.

Риман предполагал, что его теория позволяет описывать распространение света и теплоты, тяготение и электростатическое взаимодействие, а также электродинамическое и магнетическое притяжение и отталкивание. Заметим, что Риман в то время еще не знал о наличии силы, которая была выведена Лоренцем [4] только в 1892 г. Однако Риман знал закон взаимодействия токов, который был выведен Ампером и подтвержден Кольраушем и Вебером. Поэтому в 1858 г Риман представил Геттингенскому Научному обществу вариант теории в докладе «По поводу электродинамики» [2], который начинался словами:

«Королевскому обществу я позволю себе сообщить одно замечание, которое приводит в тесную связь теорию электричества и магнетизма с теорией света и лучистой теплоты. Я установил, что электродинамические действия гальванических токов могут быть объяснены, если исходить из допущения, что действие электрической массы на другие совершается не мгновенно, а распространяется по направлению к ним с постоянной скоростью (в пределах возможных ошибок наблюдений равной скорости света). При этом допущении дифференциальное уравнение распространения электрической силы — то же самое, что и уравнение распространения света и лучистой теплоты».

Основным уравнением теории Римана является волновое уравнение, описывающее скалярный потенциал системы зарядов

$$\left(\partial_t^2 - c^2\nabla^2\right)U + c^2 4\pi\rho = 0 \tag{5}$$

Риман рассматривал решение уравнения (5) для точечного заряда в форме

$$U = f(t - r/c)/r \tag{6}$$

Закон Ампера может быть выражен в форме потенциала силы взаимодействия двух проводников с током, который Риман преобразует к виду

$$-\frac{2}{c^2}\iint\frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}'}{r}dVdV'=\sum\sum\frac{ee'r^2}{c^2}\frac{dd'}{dtdt}\frac{1}{r} \tag{7}$$

Риман доказывает, что из решений (6) можно построить правую часть выражения (7). Тем самым все известные явления и силы электродинамической природы могут быть сведены к решениям уравнения (5). Отметим, что Риман не отрицает роль векторного потенциала в описании взаимодействия токов, как видно из приведенных выше уравнений (2)-(3). Действительно, рассмотрим выражение векторного потенциала точечного заряда [19]

$$\mathbf{A}=U\mathbf{v}/c \tag{8}$$

Поскольку уравнение (5) описывает поле движущегося заряда в форме потенциалов Лиенара-Вихерта, а при выводе этих потенциалов используется выражение (8), то гипотеза Римана может быть строго доказана. Само доказательство не составляет труда. Отметим также, что в теории Максвелла уравнение (5) и его решение для точечного заряда в форме (6) было получено Лоренцем [19] в 1892 г.

Риманова геометрия и общая теория относительности

Риман предполагал, что геометрия в бесконечно малом обусловлена внутренней причиной возникновения метрических отношений, например, силами связи [2]. В работе «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» Риман приходит к заключению: «Здесь мы стоим на пороге области, принадлежащей другой науке – физике, и переступить его не дает нам повода сегодняшний день». Как известно, это порог переступил Эйнштейн [4], который, который построил общую теорию относительности на основе римановой ковариантной теории многомерных многообразий [2].

Общая теория относительности является основной современной космологии и квантовой теории гравитации. Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu}\Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{9}$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & R_{ik} = R^j_{ijk}, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\ & R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}}{\partial x^\delta} + \Gamma^\mu_{\beta\delta}\Gamma^\alpha_{\mu\gamma} - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha_{\mu\delta}, \\ & \Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is}\left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

$R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ - тензор Римана, Γ^i_{kl} – символы Кристоффеля второго рода.

Уравнения движения материальной точки в гравитационном поле можно представить в форме [4, 20-23]

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{dx^\nu}{ds}\frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \tag{11}$$

Тензор энергии-импульса материи в уравнении (9), вообще говоря, зависит от гравитационного поля. В этой связи Эйнштейн и Инфельд [24] сформулировали программу, согласно которой материя может быть представлена как сингулярные решения гравитационных уравнений в пустоте.

Этот подход к решению проблемы происхождения материи не является единственным. Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна, можно предположить [25-31], что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = k g_{\mu\nu} \\ & \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(k - \Lambda) \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь k – некоторая функция, зависящая от размерности пространства. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике. Эта гипотеза соответствует идее о происхождении материи из гравитационного поля, но без специального предположения о наличии сингулярности метрики.

В работе [25] модель (12) была использована для построения метрики неоднородной вращающейся Вселенной. Был предложен механизм производства материи из темной энергии путем фазового перехода. В работах [25-31] представленная модель квантовой гравитации в многомерных пространствах размерностью D с метрикой

$$\begin{aligned} & ds^2 = \psi(t,r)dt^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1^{\ 2} - \sin^2\phi_1 d\phi_2^{\ 2} - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 d\phi_3^{\ 2} - \\ & \ldots - \sin^2\phi_1 \sin^2\phi_2 \ldots \sin^2\phi_{N-1} d\phi_N^{\ 2} \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$ - углы на единичной сфере, погруженной в $D-1$ мерное пространство. Метрика (13) описывает многие важные случаи симметрии, используемые в физике элементарных частиц. Такой подход позволяет охватить многообразие материи, которую производит фабрика природы, путем выбора уравнения состояния $p = p(\psi)$ [25-31].

В шестимерном пространстве с сигнатурой метрики $(+,+,+,-,-,-)$ можно построить естественное обобщение метрики (13) на случай наличия двух центров симметрии в виде [17-18]

$$ds^2 = \psi(t,r)dt^2 + d\chi_1{}^2 + \sin^2\chi_1 d\chi_2{}^2 - p(\psi)dr^2 - d\phi_1{}^2 - \sin^2\phi_1 d\phi_2{}^2 \tag{14}$$

Здесь $\chi_1, \chi_2, \phi_1, \phi_2$ - углы на единичных сферах, погруженных в трехмерные пространства; t, r - координаты, связанные со временем и расстоянием в трехмерном пространстве соответственно. Отметим, что связь со стандартными единицами времени и длины устанавливается путем согласования физических законов, выраженных в метрике (14) и в стандартной метрике.

Рассмотрим гравитацию в пространствах с метрикой (14). Заметим, что только четыре компоненты тензора Эйнштейна в метрике (14) отличны от нуля:

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = G_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\chi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin^2\phi_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Следовательно, в этом случае в первом уравнении (3) следует положить $k = 0$, тогда уравнения поля в метрике (14) сводятся к одному уравнению второго порядка $G_{22} = 0$. Отсюда находим

$$-p'\psi_{tt} + \psi_{rr} = -\frac{pp' - 2p''p\psi + p'^2\psi}{2p\psi}\psi_t{}^2 + \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{16}$$

Отметим, что уравнение (16) изменяет свой тип в зависимости от знака производной p':

в области $p' < 0$ уравнение (16) имеет эллиптический тип;

в области $p' > 0$ уравнение (16) имеет гиперболический тип;

в области $p' = 0$ уравнение (16) имеет параболический тип.

Сигнатура метрики (14) не меняется, если потребовать дополнительно $p(\psi) > 0, \psi > 0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби в метрике (14) имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial \chi_1}\right)^2+\sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \chi_2}\right)^2\\ -\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2-\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_1}\right)^2-\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial S}{\partial \phi_2}\right)^2=0\end{gathered} \tag{17}$$

Уравнение (17) можно проинтегрировать при некоторых предположениях, используя метод, который предложил Шредингер [32]. Суть метода состоит в том, чтобы представить решение уравнения (9) в виде

$$S=S_{cl}+\hbar\ln\Psi_S \tag{18}$$

Здесь в теорию в явном виде вводится классическое действие - S_{cl}, постоянная Планка и волновая функция Ψ_S. В случае метрики (14) удобно будет выбрать в качестве переменных квантовой механики углы на единичных сферах, а в качестве координат классического действия – время и радиальную координату. Тогда уравнение (17) разделяется на два уравнения

$$\begin{gathered}\frac{1}{\psi}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{p}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2=M^2\\ \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2+\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2-\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_1}\right)^2-\sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_2}\right)^2=\frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь M – произвольная постоянная.

Гравитационные волны и топология заряда в 6D

Рассмотрим гравитационные волны, которые возникают в метрике (14) в случае линейного уравнения состояния. Положим в уравнении (16)

$p=\psi/c^2, \psi=e^w$.

Тогда уравнение (16) приводится к виду волнового уравнения:

$$w_{tt}=c^2w_{rr} \tag{19}$$

Запишем общее решение уравнения (19):

$$w(r,t)=f(\eta)+g(\zeta),\quad \eta=ct-r, \varsigma=ct+r \tag{20}$$

Здесь $f(\eta), g(\varsigma)$ – произвольные функции. Используя выражение (20), можно указать общее решение уравнений Эйнштейна, описывающее гравитационные волны в метрике (14):

$$\begin{aligned} &\psi(r,t) = \exp[f(\eta) + g(\varsigma)], \quad p(\psi) = \psi / c^2, \\ &\eta = ct - r, \varsigma = ct + r \end{aligned} \tag{21}$$

Гравитационные волны типа (21) распространяются в комбинации, включающей опережающие и запаздывающие волны, следовательно, гравитационные волны могут служить источником квантового движения частиц, например, в форме волн де Бройля [28-31].

Запишем первое уравнение (18) в метрике (21), имеем

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial r}\right)^2 = (M/c)^2 \exp[f(\eta) + g(\varsigma)] \tag{22}$$

Предполагая, что действие зависит от координат η, ς, преобразуем обе части уравнения (22) к эквивалентному виду

$$4\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \eta}\right)\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \varsigma}\right) = (M/c)^2 \exp[f(\eta) + g(\varsigma)] \tag{23}$$

Отсюда следует, что действие можно выразить через произвольные функции $f(\eta), g(\varsigma)$ в виде

$$S_{cl} = \frac{M}{2c}\int e^{f(\eta)} d\eta + \frac{M}{2c}\int e^{g(\zeta)} d\zeta \tag{24}$$

Следовательно, классическое действие в этом случае выражается в виде комбинации опережающих и запаздывающих волн, распространяющихся со скоростью света. Но в классической физике только одна механическая система обладает таким свойством – это электромагнитное поле в теории Максвелла.

Мы, следовательно, доказали, что электродинамика Максвелла может быть сведена к задаче нахождения метрики путем решения линейного волнового уравнения (19). Как известно, для решений уравнений такого типа выполняется принцип суперпозиции.

Отметим, что метрика (14) является уникальной в том смысле, что приводит к линейному уравнению поля (19), тогда как, например, в метрике (13) в аналогичной задаче приходим к уравнению Лиувилля [26-31], для которого не выполняется принцип суперпозиции.

Далее заметим, что если известно классическое действие системы, то ему соответствует некоторое решение уравнения (19). Действительно, используя уравнение (23), запишем решение (20) в форме

$$w(r,t) = f(\eta) + g(\zeta) = \ln\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \eta}\right) + \ln\left(\frac{\partial S_{cl}}{\partial \zeta}\right) \tag{25}$$

Следовательно, мы доказали, что каждому действию классической системы соответствует некоторая функция, описывающая метрику системы.

Используя полученные результаты можно построить однозначное соответствие между электродинамикой Максвелла и теорией гравитации в шестимерном пространстве [17-18]. Это соответствие строится аналогично тому, как это было сделано в случае пятимерной теории Калуцы [5,7,10].

Покажем, что среди всех решений уравнения (16) существует такая метрика, которая приводит к закону Кулона. Для этого заметим, что метрика (5) описывает систему, обладающую двумя центрами симметрии. Закон Кулона определен в статическом случае, для которого уравнение (16) приводится к виду

$$\psi_{rr} = \frac{p + p'\psi}{2p\psi}\psi_r^2 \tag{26}$$

Выпишем первый интеграл уравнения (26), имеем

$$\psi_r^{\;2} = ap(\psi)\psi \tag{27}$$

Здесь a – произвольная постоянная.

Рассмотрим решения первого уравнения (18), линейные по времени и зависящие явно от статической метрики, удовлетворяющей уравнению (26),

$$S_{cl} = Et + \widetilde{S}(\psi(r))$$

В этом случае первое уравнение (18) приводится к виду

$$\frac{1}{\psi}E^2 - a\psi\left(\frac{\partial\widetilde{S}}{\partial\psi}\right)^2 = M^2 \qquad (28)$$

Общее решение уравнения (28) можно представить в форме

$$\widetilde{S} = S_0 \pm \frac{2}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{E^2 - M^2\psi} - E\,\mathrm{Arc}\tanh\sqrt{1 - M^2\psi / E^2}\right) \qquad (29)$$

Используя уравнение (28) и выражение (29) докажем теорему: для любой статической метрики действие имеет стационарную точку такую, что в этой точке действие достигает минимума или максимума.

Действительно, полагая в уравнении (28) $\partial\widetilde{S}(\psi)/\partial\psi = 0$, находим, что это выполняется в точке $\psi_0 = E^2 / M^2$, а из выражения (29) находим, что в этой точке $\widetilde{S} = S_0$. В зависимости от выбранного знака в выражении (29) функция $\widetilde{S}(\psi)$ достигает в этой точке максимума или минимума, что и требовалось доказать.

Следовательно, мы доказали, что принцип стационарности действия всегда выполняется в случае статической метрики. Поэтому, в такой метрике можно построить классическую механику, определить понятие силы и установить закон Кулона.

Заметим, что решение (29) не зависит от вида функции $p(\psi)$, следовательно, можно положить $p = \psi / c^2, \psi = e^w$, в результате приходим к уравнению (19). Но среди решений уравнения (19) есть только одно статическое решение, которое описывается линейной функцией

$$\psi = e^w, \quad w = -2mr + b \qquad (30)$$

Метрика (30) использовалась в наших работах [26-29] и других. Эта метрика может быть согласована с метрикой Шварцшильда, описывающей статическое гравитационное поле точечной массы m [26].

Заметим, что решение (30) определено во всем пространстве, тогда как при любом возмущении метрики решение (30) распадается в систему волн. Рассмотрим решения уравнений (16), (19) вида

$$\psi = e^{w}, \quad w = \varepsilon \sin[a(ct \pm r)] \tag{31}$$

Построим отображение решения (31) в четырехмерном пространстве-времени. Для этого заметим, что метрика (14) описывает систему, обладающую двумя центрами симметрии. Закон Кулона определен в статическом случае для точечного заряда в сферической системе координат. Связь между координатами r, t и стандартно определенным времени и расстоянием в сферической системе координат зададим в виде

$$\tilde{r} = R_0 / r, \quad \tilde{t} = T_0 / t \tag{32}$$

Здесь R_0, T_0 – масштабы длины и времени, характеризующие заряд. Подставляя выражения (32) в (31), находим

$$\psi = e^{w}, \quad w = \varepsilon \sin[a(cT_0 / \tilde{t} \pm R_0 / \tilde{r})] \tag{33}$$

Далее заметим, что закон Кулона должен выполняться в статическом случае и в макроскопическом масштабе. Следовательно, положим в правой части (33) $\tilde{r} >> R_0, \tilde{t} \to \infty$, тогда используя разложение в ряд функции $\sin x$ в окрестности $x \to 0$, получим окончательно

$$\psi = e^{w} = 1 \pm \frac{\varepsilon a R_0}{\tilde{r}} + \dots \tag{34}$$

Таким образом, бегущая волна (31) в метрике (14) отображается в четырехмерном пространстве-времени как статическое кулоновское поле.

Метрика (31) позволяет построить модель квантования заряда, не прибегая к квантовой механике. Достаточно будет предположить, что область распространения волновых возмущений ограничена в пространстве. Без потери общности можно считать, что эти границы совпадают с 0 и единицей длины в метрике (14). Для простых гармонических колебаний, которые приводят к кулоновскому потенциалу типа метрики (34), положим на границах области

$$\begin{aligned} & r = 0; R_0 : \\ & w = \varepsilon \sin[a(ct \pm r)] = \varepsilon \sin(act)\cos(ar) \pm \varepsilon \cos(act)\sin(ar) \\ & \quad = \varepsilon \sin(act) \\ & \to acR_0 = 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2... \end{aligned} \tag{35}$$

Следовательно, выражение (34) принимает вид

$$\psi = e^w = 1 \pm \frac{2\varepsilon\pi n}{c\tilde{r}} + ... \approx 1 + \frac{en}{\tilde{r}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{36}$$

Здесь элементарный заряд равен $e = 2\varepsilon\pi / c$, что и требовалось доказать

Риман предполагал, что его теория позволяет описывать распространение света и теплоты, тяготение и электростатическое взаимодействие, а также электродинамическое и магнетическое притяжение и отталкивание. Однако для нас более важным является то обстоятельство, что гипотеза Риман о субстанции, поглощаемой атомами вещества, хорошо согласуется с моделью электрического заряда в 6D [17-18].

Можно предположить, что осязаемый и неосязаемый миры в теории Римана соответствуют двум трехмерным мирам в метрике (14). Действительно, в этом случае приходим к линейной модели (19), описывающей распространение волн. В осязаемом мире эти волны воспринимаются как кулоновское поле (36), что соответствует электрическому заряду в теории Максвелла [2].

Эта гениальная догадка Римана так и не получила должного признания, но риманова геометрия нашла широкое применение в физике и, прежде всего, в общей теории относительности Эйнштейна [4, 20-23]. Из вида уравнений (9)-(11) следует, что теория Эйнштейна является универсальной, поэтому обобщается на пространство любого числа измерений. Так, в случае пяти измерений можно осуществить объединение теории гравитации и электромагнетизма в рамках единой теории поля Калуцы [5,7,10]. Существуют теории гравитации в пространствах 6, 10 11 и 12 измерений [33].

Случай пространства шести измерений с сигнатурой метрики $(+,+,+,-,-,-)$ является уникальным, прежде всего потому, что позволяет построить метрику двух связанных между собой трехмерных миров, в каждом из которых реализуется стандартное трехмерное движение, в полном соответствии с гипотезой Римана [2].

Волны на двух сферах

Движение в пространстве шести измерений с сигнатурой метрики $(+,+,+,-,-,-)$ обладает рядом свойств, которые, видимо, можно наблюдать в экспериментах. Рассмотрим волновые решения второго уравнения (18), имеем

$$\left(\frac{\partial\Psi_S}{\partial\phi_1}\right)^2+\sin^{-2}\phi_1\left(\frac{\partial\Psi_S}{\partial\phi_2}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi_S}{\partial\chi_1}\right)^2-\sin^{-2}\chi_1\left(\frac{\partial\Psi_S}{\partial\chi_2}\right)^2=\frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2 \qquad (37)$$

В общем случае рассмотрим решения уравнения (37) зависящие от четырех переменных

$$\Psi_s=\Psi_1(f(\phi_1)+\phi_2)\Psi_2(g(\chi_1)+\chi_2) \qquad (38)$$

Подставляя выражение в уравнение (37) и разделяя переменные, находим

$$
\begin{aligned}
&(1+\sin^{-2}\phi_1)\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1}\right)^2 \frac{(\Psi_1')^2}{\Psi_1^2} = k_1{}^2, \quad (1+\sin^{-2}\chi_1)\left(\frac{\partial g}{\partial \chi_1}\right)^2 \frac{(\Psi_2')^2}{\Psi_2^2} = k_2{}^2, \\
&(1+\sin^{-2}\phi_1)\left(\frac{\partial f}{\partial \phi_1}\right)^2 = n_1{}^2, \quad (1+\sin^{-2}\chi_1)\left(\frac{\partial g}{\partial \chi_1}\right)^2 = n_2{}^2 \\
&k_1{}^2 - k_2{}^2 = \frac{M^2}{\hbar^2}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Разрешая систему уравнений (43), получим окончательно

$$
\begin{aligned}
&\Psi_1 = \Psi_{10}\exp[(k_1/n_1)(f(\phi_1)+\phi_2)], \\
&f = f_0 \pm n_1 i \ln\left(i\sqrt{2}\cos\phi_1 + \sqrt{3-\cos(2\phi_1)}\right) \\
&\Psi_2 = \Psi_{20}\exp[(k_2/n_2)(g(\chi_1)+\chi_2)], \\
&g = g_0 \pm n_2 i \ln\left(i\sqrt{2}\cos\chi_1 + \sqrt{3-\cos(2\chi_1)}\right)
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Здесь $\Psi_{i0}, k_i, n_i, f_0, g_0$ - произвольные постоянные. Функция Гамильтона-Якоби системы согласно (18) равна

$$
S = S_{cl} + \hbar(k_1/n_1)(f(\phi_1)+\phi_2) + \hbar(k_2/n_2)(g(\chi_1)+\chi_2) \tag{41}
$$

На рис. 1 представлена функция Гамильтона-Якоби (41) в зависимости от переменных χ_1, ϕ_1 для значений параметров $M = 1, k_2 = 1, 2$. Отметим, что функция Гамильтона-Якоби является аналогом функции, описывающей волновой фронт в геометрической оптике [34]. Периодическая зависимость функции (41) от двух переменных означает, что здесь мы имеем дело с особого рода волновым движением, охватывающим две сферы. При отображении в трехмерных мирах эти волны имеют вид раковин различной конфигурации – рис.2.

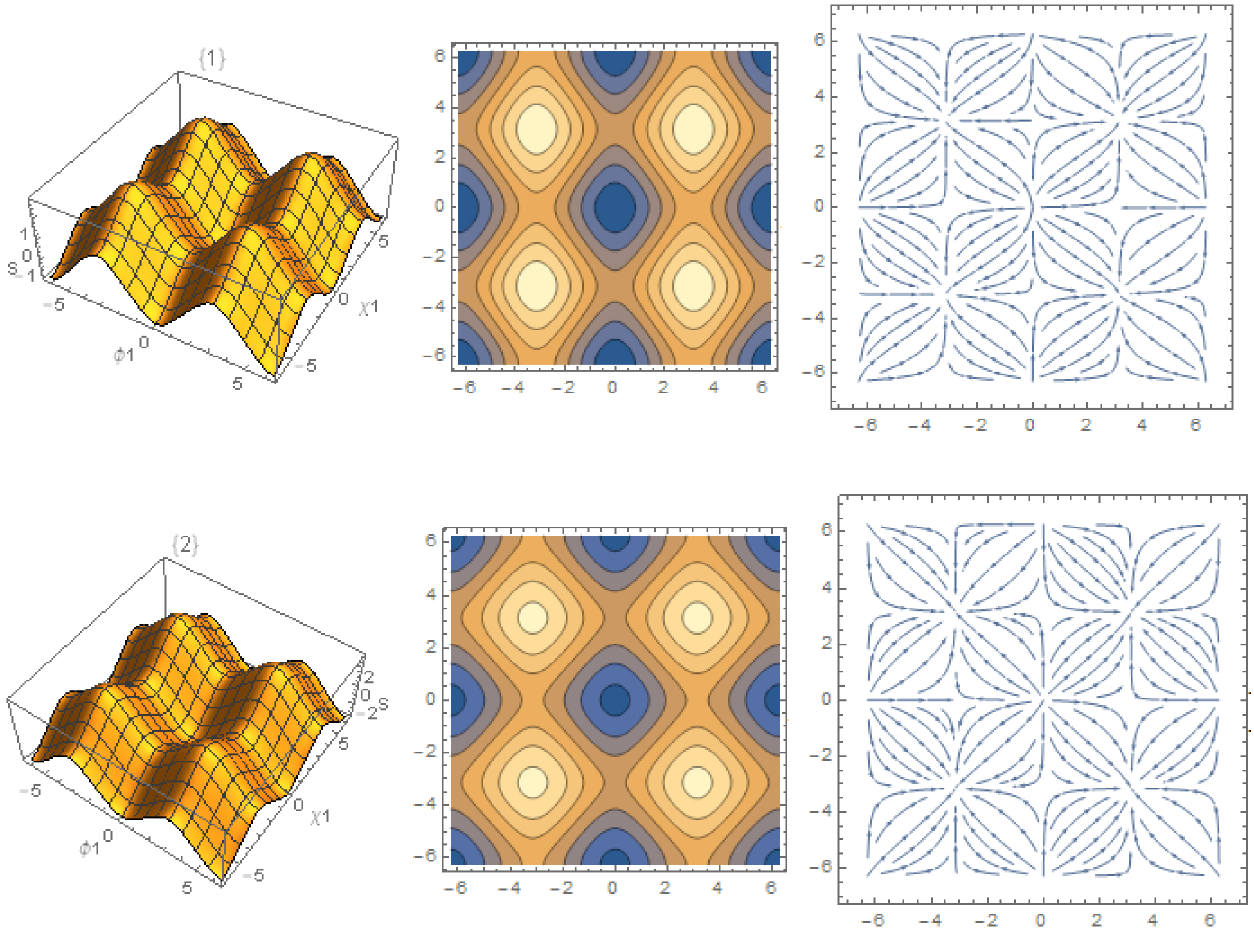

Рис. 1. Нелинейные волны на двух сферах в 6D: слева поверхность функции Гамильтона-Якоби, в центре – линии уровня, справа - линии тока, вычисленные для значений параметров $M = 1, k_2 = 1, 2$.

В общем случае описанные волны являются нелинейными. Однако в классической механике обычно рассматривают линейную относительно угловых переменных функцию Гамильтона-Якоби [34]. Предположим для упрощения анализа, что

$$|\varphi_1 - \pi / 2| << 1, |\chi_1 - \pi / 2| << 1.$$

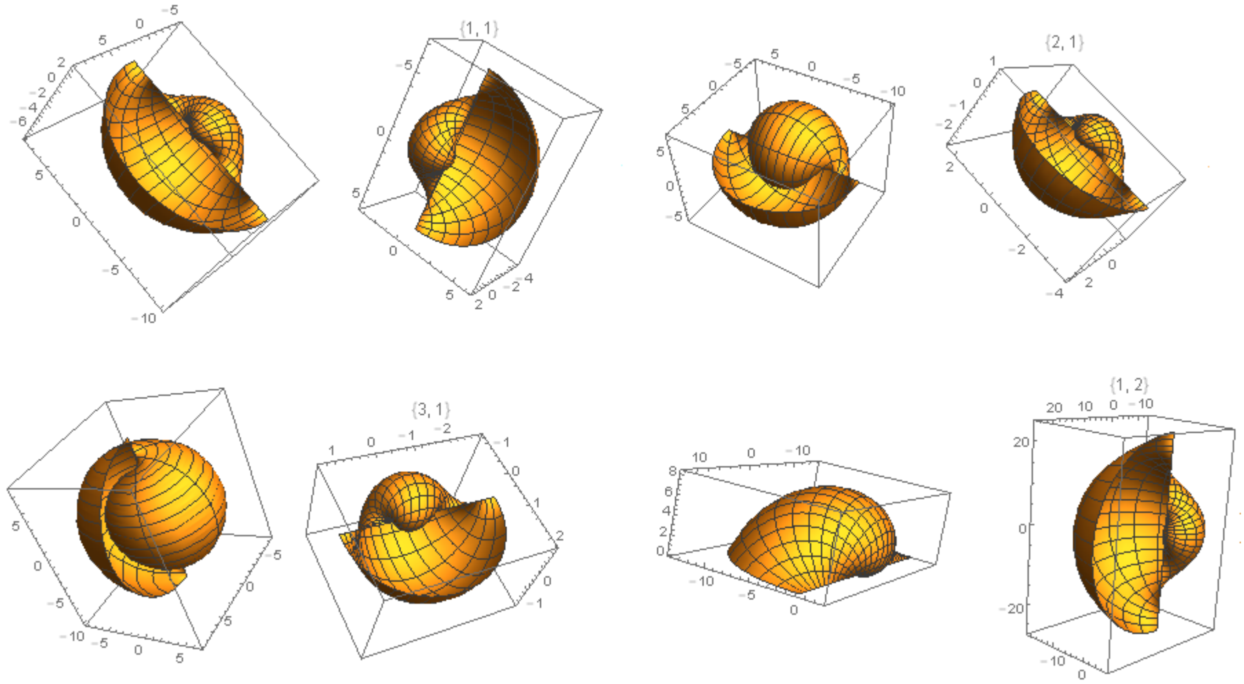

Рис. 2. Функция Гамильтона-Якоби в сферических координатах: над рисунками указаны значения параметров k_2, n_1.

В этих предположениях уравнение (37) приводится к виду

$$\left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \phi_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_2}\right)^2 = \frac{M^2}{\hbar^2}\Psi_S^2 \tag{42}$$

Одним из решений этого уравнения является функция

$$\begin{gathered} \Psi_s = \Psi_0 \exp(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \omega_1\chi_1 + \omega_2\chi_2) \\ \lambda_1{}^2 + \lambda_2{}^2 - \omega_1{}^2 - \omega_2{}^2 = \frac{M^2}{\hbar^2} \end{gathered} \tag{43}$$

Здесь $\Psi_0, \lambda_1, \lambda_2, \omega_1, \omega_2$ - произвольные постоянные. В таком случае функцию Гамильтона-Якоби можно представить в виде

$$S = S_{cl} + \hbar \ln \Psi_S = S_{cl} + \hbar(\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \omega_1\chi_1 + \omega_2\chi_2) \tag{44}$$

Положим $\hbar\lambda_1 = J_1$ и т.д. В результате приходим к функции Гамильтона-Якоби, записанной в переменных действие-угол, которые используются в классической механике [34].

Аналогичную функцию Гамильтона-Якоби можно получить и непосредственно из (41), полагая, что угловые переменные χ_1, ϕ_1 изменяются в ограниченных пределах. В этом случае поверхность функции Гамильтона-Якоби имеет вид спирали – рис. 3-4.

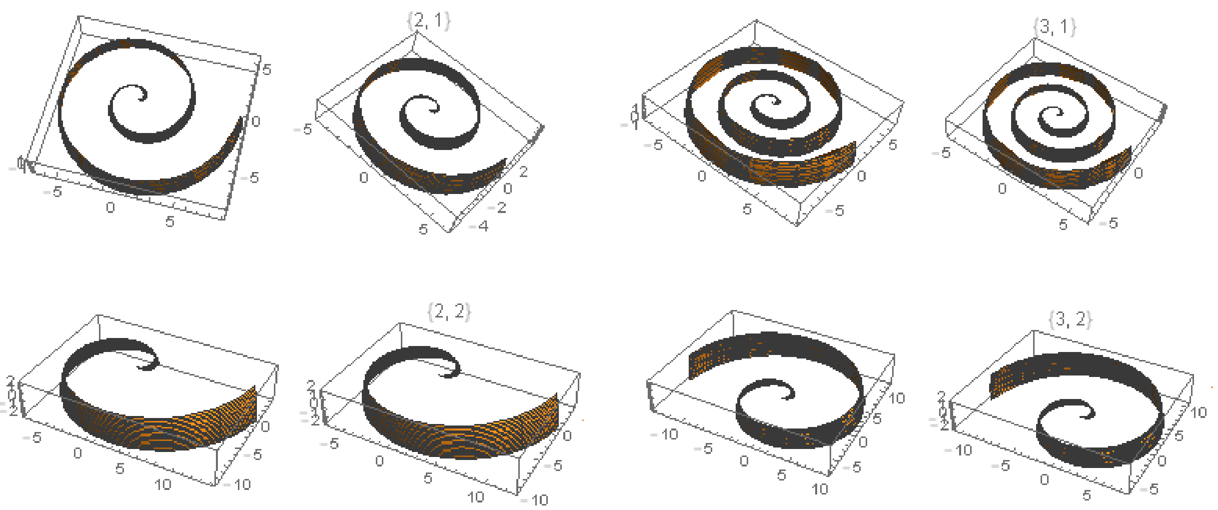

Рис. 3. Функция Гамильтона-Якоби в сферических координатах в случае $|\varphi_1 - \pi/2| << 1, |\chi_1 - \pi/2| << 1$: над рисунками указаны значения параметров k_2, n_1.

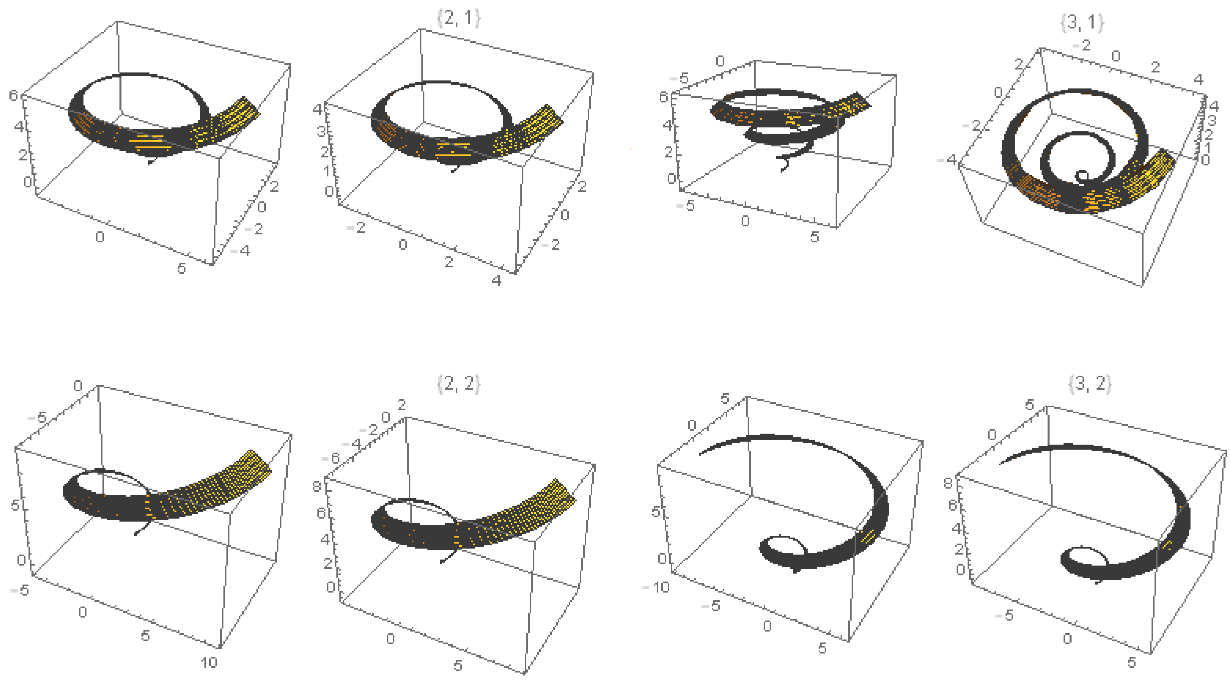

Рис. 4. Функция Гамильтона-Якоби в сферических координатах в случае $|\varphi_1 - \pi/4| << 1, |\chi_1 - \pi/4| << 1$: над рисунками указаны значения параметров k_2, n_1.

Наконец, рассмотрим решения уравнения (42), зависящие от интервала $s^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 - \chi_1^2 - \chi_2^2$. В этом случае решением является степенная функция

$$\Psi_s = \Psi_0 s^m, \quad 4m^2 = \frac{M^2}{\hbar^2} \tag{45}$$

Соответственно функция Гамильтона-Якоби приводится к виду

$$S = S_{cl} + \hbar \ln \Psi_S = S_{cl} \pm \frac{m}{2} \ln s \tag{46}$$

Этот вид движения на двух сферах представляет интерес в связи с моделированием метрики адронов [35-36].

Отметим, что движение на двух сферах наблюдается в природе в форме раковин, типа приведенных на рис. 2. Причина, по которой некоторые живые организмы используют оптимальную поверхность, описываемую функцией Гамильтона-Якоби (41) не вполне ясны. Возможно, что это связано с происхождением живых организмов, главным условием существования которых является копирование наследственной информации. Не исключено, что живые организмы научились хранить информацию в неосязаемом мире. В таком случае движение на двух сферах, расположенных в двух мирах – осязаемом и неосязаемом, является свойством живых организмов, что позволяет им адаптироваться к изменяющимся условиям окружающей среды на протяжении сотен миллионов лет.

Наконец, заметим, что гипотеза Римана о наличии двух миров связанных через посредства атомов инертной материи, сквозь которые перетекает некий флюид может получить подтверждение в свете открытия темной материи и темной энергии [40-41]. Представленная выше модель волновых движений в 6D в общей теории относительности Эйнштейна является одним из применений гипотезы Римана и гипотезы о влиянии темной материи и темной энергии на метрику пространства-времени [25-31].

Библиографический список

1. Rene Descartes. Principia philosophiae. 1644.
2. Риман Б. Фрагменты философского содержания. Сочинения. Москва-Ленинград, ОГИЗ, 1948.
3. Maxwell James Clerk. A dynamical theory of the electromagnetic field, 1864.
4. Einstein A. Zur allgemeinen Relativitatstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 44, 2, 778—786; Erklarung der Perihelbeivegung der Merkur aus der allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1915, 47, 2, 831—839; Die Grundlage der allgemeinen Relativitatstneorie. Ann. Phys., 1916, 49, 769—822; Nahemngsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1916, 1, 688—696; Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitdtstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Uber Gravitationwellen. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 154—167.

5. Kaluza, Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. (Math. Phys.) 1921, 966–972.

6. Einstein A. Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizitat// Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1925, 414—419.

7. Einstein A., Bargmann V and Bergmann P. On Five-dimensional Representation of Gravitation and Electricity// Theodore von Karman Anniversary Volume, Pasadena, Calif. Inst. T.echnol., 1941, 212—225.

8. Einstein A. A Comment on a Criticism of Unified Field Theory. Phys. Rev., 1953, 89, 321.

9. Schrödinger Erwin. The final affine field laws//Proc. Royal Irish Acad. 51A, pp. 163-171, 1947; Proc. Royal Irish Acad. 52A, pp. 1-9, 1948.

10. Ю. Б. Румер. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат,1956. 152 с.

11. Wheeler J.A. Geometrodynamics. – Academic Press, NY, 1962.

12. Heisenberg W. Introduction to the unified field theory of elementary particles. – Interscience Publishers, London-NY-Sydney, 1966.

13. Garrett Lisi. An Exceptionally Simple Theory of Everything//arXiv:0711.0770v1, 6 Nov 2007.

14. Shifflett J. A. A modification of Einstein-Schrodinger theory that contains Einstein-Maxwell-Yang-Mills theory// Gen.Rel.Grav.41:1865-1886, 2009.

15. Finkelstein R.J. An SLq(2) Extension of the Standard Model// arXiv:1205.1026v6, 2013.

16. Sundance O. Bilson-Thompson, Fotini Markopoulou, Lee Smolin. Quantum gravity and the standard model//arXiv:hep-th/0603022, 21 Apr 2007.

17. Трунев А.П. Топология электрического заряда в 6D// Chaos and Correlation, Dec. 29, 2014.

18. Трунев А.П. Электрический заряд в 6D//Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №10(104). С. 2154 – 2177. – IDA [article ID]: 1041410152. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/10/pdf/152.pdf

19. Lorentz Hendrik Antoon. La Théorie electromagnétique de Maxwell et son application aux corps mouvants//Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles 25: 363–552,1892.

20. Hawking S.W., Ellis G.F.R.. The large scale structure of space-time. – Cambridge University Press, 1973.

21. Martin Rees, Remo Ruffini, John A Wheeler. Black holes, gravitational waves and cosmology: an introduction to current research. -New York, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc. (Topics in Astrophysics and Space Physics. Volume 10), 1974. 182 p

22. Landau L.D., Lifshitz E.M.. The Classical Theory of Fields. (3rd ed.). Pergamon Press, 1971.

23. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения (2-е изд.). – М.: ГИФМЛ, 1961.

24. Einstein A., Infeld L. Gravitational Equations and the Problems of Motion //Ann.Math., 1940,41, 455—464; On the Motion of Particles in General Relativity Theory// Canad. J. Math., 1949, 1, 209—241.

25. Trunev A.P. Cosmology of inhomogeneous rotating universe and reality show//, Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 2014. – №01(095). – IDA [article ID]: 0951401028, http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/28.pdf

26. Трунев А.П. Квантовая теория гравитации совместная с теорией Янга-Миллса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №01(095). С. 1204 – 1223. – IDA [article ID]: 0951401070. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/01/pdf/70.pdf

27. Trunev A.P. Gravitational waves and quantum theory // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1146 – 1161. – IDA [article ID]: 0961402078. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/78.pdf

28. Трунев А.П. Гравитационные волны и квантовая теория Шредингера // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1189 – 1206. – IDA [article ID]: 0961402081. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/81.pdf

29. Трунев А.П. Квантовая теория гравитации и представление реальности // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №02(096). С. 1062 – 1089. – IDA [article ID]: 0961402074. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/02/pdf/74.pdf

30. Трунев А.П. Атом Шредингера и Эйнштейна // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). С. 1377 – 1401. – IDA [article ID]: 0971403094. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/94.pdf

31. Трунев А.П. Гравитационные волны и стационарные состояния квантовых и классических систем // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2014. – №03(097). С. 1303 – 1323. – IDA [article ID]: 0971403090. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2014/03/pdf/90.pdf

32. Erwin Schrödinger. Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung)//Annalen der Physik, (4), 79, (1926), 361-376.

33. Bernard de Wit. Supergravity // arXiv: hep-th/0212245v1 19 Dec 2002.

34. Ланцош К. Вариационные принципы механики. – М., Физматгиз, 1965.

35. Trunev A.P. Hadrons metrics simulation on the Yang-Mills equations// Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 84(2012), no. 10, 874–887. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf

36. Trunev A.P., Dynamics of quarks in the hadrons metric with application to the baryon structure// Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 85(2013), 525–542. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf

37. Trunev A.P., Dynamics of quarks in the baryons metric and structure of nuclei//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 85(2013), 623–636. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/49.pdf (in Russian).

38. Trunev A.P. Quark dynamics in atomic nuclei and quark shells//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 86(2013), Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/02/pdf/59.pdf

39. Trunev A.P. Preon shells and atomic structure//Network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (The Journal KubGAU) [electronic resource], Krasnodar KubGAU, 87(2013), no. 03. Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/03/pdf/61.pdf (inRussian).

40. Plank Collaboration: Cosmological parameters. – Plank 2013 results, Astronomy & Astrophysics manuscript, March 21, 2013.

41. Rosner J. Planning the Future of U.S. Particles Physics// arxiv: 1401.6075v1 [hep-ex] 23 Jan 2014.