



**Chaos and Correlation**  
International Journal, July 19, 2012

## Периодический закон и ядерные оболочки

## Periodic trends and nuclei shells

**Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)**

**Alexander P. Trunev**

На основе данных по энергии связи нуклонов для известных нуклидов установлены параметры, характеризующие периодические закономерности в формировании ядерных оболочек.

Ключевые слова: изотопы, изотоны, нейтрон, периодический закон, протон, ядро, ядерная оболочка.

Parameters describing periodic trends in the formation of nuclear shells have been established based on the theory of nuclear interactions and data on the binding energy of nucleons for the set of known nuclides.

Keywords: Isotopes, Isotones, Neutron, Nuclei, Nuclei Shell, Periodic Trends, Proton.

### **Введение**

Периодический закон, открытый Менделеевым в 1869 году, сыграл огромную роль в развитии представлений о строении вещества. В одной из первых формулировок этот закон гласит, что «свойства простых тел, а также формы и свойства соединений элементов, а потому и свойства образуемых ими простых и сложных тел, стоят в периодической зависимости от их атомного веса» [1]. Используя этот закон, Менделеев создал периодическую таблицу элементов, на основе которой предсказал новые элементы - галлий, скандий, германий, астат, полоний, технеций, рений, франций.

Иваненко [2-3], видимо, был одним из первых, кто поставил вопрос о расширении периодического закона, включив в него периодические закономерности, которые наблюдаются в атомных ядрах и некоторых экзотических образованиях, типа мезоатомов. Согласно теории ядерных оболочек [4-5], периодические закономерности в ядрах объясняются, по аналогии с электронными оболочками, принципом Паули, который применяется отдельно в отношении протонов и нейтронов, заполняющих ядерные оболочки. При таком расширении периодического закона его исходная формулировка представляется вполне логичной, так как свойства ядер зависят не только от числа протонов, но и от числа нейтронов. Таким образом, свойства ядер и свойства атомов

химических элементов объясняются однотипно на основе квантовой механики и принципа Паули.

В настоящее время энергия связи нуклонов измерена с высокой точностью практически для всех известных нуклидов. Однако, в отличие от энергии ионизации в атомах, зависимость энергии связи от числа нуклонов не содержит каких-либо явных указаний на наличие ядерных оболочек. Тем не менее, известны попытки установить наличие ядерных оболочек и т.н. магических чисел по отклонению энергии связи от стандартного тренда полуэмпирической модели Вайцзеккера [6] и других моделей [7].

В настоящей работе исследована зависимость энергии связи нуклонов для всех известных нуклидов с использованием системы Wolfram Mathematica 8 [8] и трех моделей энергии связи: 1) полуэмпирической модели Вайцзеккера; 2) 5D модели ядерных взаимодействий [9-11]; 3) информационной модели [12]. Параметры всех моделей определялись локально для изотопов каждого элемента. Установлено, что во всех трех случаях параметры моделей имеют сходное поведение в зависимости от числа протонов, что указывает на наличие внутренней структуры ядер.

### **Описание 5D модели**

Можно заметить, что периодический закон в оригинальной формулировке Менделеева является локальным, так как связывает свойства простых веществ с их атомным весом, который в то время, когда был сформулирован закон, определялся путем взвешивания в гравитационном поле земли. Такое соотнесение свойств веществ с их гравитационными свойствами представляется разумным. Для ответа на вопрос о фундаментальных причинах, обуславливающих наличие закона периодичности в природе, рассмотрим общую модель атомных ядер и атомов вещества [10-11]. В этой модели свойства вещества определяются параметрами метрического тензора в 5-мерном пространстве, которые зависят от комбинации заряда и гравитационных свойств центрального ядра в виде [9]

$$k = 2\gamma M_A^3 c^2 / Q^4, \quad \varepsilon^2 / k = 2\gamma M_A / c^2 \quad (1)$$

Здесь  $\gamma, c, Q$  - гравитационная постоянная, скорость света и заряд ядра соответственно. Относительно природы заряда будет предполагать, что исходный заряд является электрическим, но он может быть экранирован различными природными полями. Сам механизм экранирования и соответствующие поля рассмотрены ниже. В случае протона и электрона параметры метрического тензора (1) представлены в таблице 1.

Таблица 1. Параметры метрического тензора, вычисленные для электрона и протона

	$k, 1/\text{м}$	$\varepsilon$	$r_{\text{max}}, \text{М}$	$r_{\text{min}}, \text{М}$
e-	1,703163E-28	4,799488E-43	5,87E+27	2,81799E-15
p+	1,054395E-18	1,618178E-36	9,48E+17	1,5347E-18

Отметим, что максимальный масштаб  $r_{\text{max}} = 1/k$  в случае электрона превосходит размер наблюдаемой Вселенной, тогда как для протонов этот масштаб составляет около 100 световых лет. Минимальный же масштаб соответствует классическому радиусу заряженной частицы  $r_{\text{min}} = \varepsilon / k = e^2 / mc^2$ , который в случае протона и электрона соизмерим с масштабом слабых и ядерных взаимодействий.

Легко видеть, что второй параметр модели (1) непосредственно входит в формулу периодического закона Менделеева [1]. Комбинируя параметры, находим заряд ядра в виде  $Q = \varepsilon^{3/2} c^2 / k \sqrt{2\gamma}$ . Следовательно, периодический закон в современной его формулировке также можно выразить через параметры метрического тензора (1).

Метрический тензор можно разложить в ряд вблизи массивного центра гравитации в 5-мерном пространстве по степеням безразмерного расстояния до источника,  $\tilde{r} = kr$ , здесь  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Рассмотрим вид метрического тензора, возникающего при удержании первых трех членов разложения для случая метрики в поле центральных сил с гравитационным потенциалом в форме Ньютона. Такой выбор метрики представляется оправданным, прежде всего, потому, что для указанного потенциала выполняется принцип суперпозиции. Положим  $x^1 = ct, x^2 = x, x^3 = y, x^4 = z$ , в этих обозначениях имеем для квадрата интервала в 4-мерном пространстве:

$$ds^2 = (1 + 2\varphi / c^2) c^2 dt^2 - (1 - 2\varphi / c^2) (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

$$\varphi = - \frac{\gamma M}{r} \quad (2)$$

Полагая, что  $\varepsilon^2 / k = 2\gamma M / c^2$ , приходим к выражению интервала в зависимости от параметров метрики в 5-мерном пространстве:

$$ds^2 = (1 - \varepsilon^2 / k) c^2 dt^2 - (1 + \varepsilon^2 / k) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (3)$$

Далее заметим, что в этом случае метрический тензор в четырехмерном пространстве является диагональным с компонентами

$$g_{11} = 1 - \varepsilon^2 / kr; \quad g_{22} = g_{33} = g_{44} = -(1 + \varepsilon^2 / kr) \quad (4)$$

Зададим векторный потенциал источника, связанного с центром гравитации в виде

$$g_1 = \varepsilon / kr, \quad \mathbf{g} = g_1 \mathbf{u} \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{u}$  – некоторый вектор в трехмерном пространстве, который определим ниже. Отсюда находим скалярный и векторный потенциал электромагнитного поля

$$\varphi_e = \frac{Q}{r} = \frac{Mc^2}{e} \frac{\varepsilon}{kr}, \quad \mathbf{A} = \varphi_e \mathbf{u} \quad (6)$$

Для описания движения материи с учетом ее волновых свойств, предположим, что стандартное уравнение Гамильтона-Якоби в релятивистской механике и уравнение типа Клейна-Гордона в квантовой механике возникают как следствие выполнения волнового уравнения в 5-мерном пространстве [9]. Это уравнение в общем случае можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-G}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Psi \right) = 0 \quad (7)$$

Здесь  $\Psi$  - волновая функция, описывающая, согласно (7), скалярное поле в пятимерном пространстве,  $G^{ik}$  - контравариантный метрический тензор,

$$G^{ik} = \eta^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & -g^1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & -g^2 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & -g^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & -g^4 \\ -g^1 & -g^2 & -g^3 & -g^4 & \lambda \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\lambda_1 = (1 - \varepsilon^2 / kr)^{-1}; \quad \lambda_2 = -(1 + \varepsilon^2 / kr)^{-1}$$

$$g^1 = \lambda_1 g_1, \quad g^2 = \lambda_2 g_2, \quad g^3 = \lambda_2 g_3, \quad g^4 = \lambda_2 g_4$$

$$\lambda = 1 + \lambda_1 g_1^2 + \lambda_2 (g_2^2 + g_3^2 + g_4^2); \quad G = \eta^5 / (ab^3); \quad \eta = (kr)^2.$$

Далее заметим, что в исследуемой метрике, зависящей только от радиальной координаты, выполняется следующее соотношение

$$F^\mu = \eta \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \right) = \eta \frac{\partial r}{\partial x^\mu} \frac{d}{dr} \left( \sqrt{-G} G^{\mu\nu} \right) \quad (9)$$

С учетом выражений (8) и (9) запишем волновое уравнение (7) в виде

$$\frac{\lambda_1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - |\lambda_2| \nabla^2 \Psi + \lambda \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} - 2g^i \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^i \partial \rho} + F^\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = 0 \quad (10)$$

Отметим, что последнее слагаемое в уравнении (10) имеет порядок  $\eta^2 k = k^5 r^4 \ll 1$ . Следовательно, это слагаемое можно отбросить в задачах, характерный масштаб которых значительно меньше, чем максимальный масштаб из таблицы 1. Уравнение (10) примечательно тем, что оно не содержит каких-либо параметров, характеризующих

скалярное поле. Поле приобретает массу и заряд, не только электрический, но и сильный, в процессе взаимодействия с центральным телом, что обусловлено только метрикой 5-мерного пространства. [9-11].

Рассмотрим задачу о движении материи вокруг заряженного центра гравитации, обладающего электрическим и сильным зарядом, например, вокруг протона. В процессе решения этой задачи необходимо определить инерционную массу материи и энергию связи. Поскольку уравнение (10) является линейным и однородным, такую задачу можно решить в общем случае.

Введем полярную систему координат  $(r, \phi, z)$  с осью  $z$  направленной вдоль векторного потенциала (8), положим в уравнении (10)

$$\Psi = \psi(r) \exp(i l \phi + i k_z z - i \omega t - i k_\rho \rho) \quad (11)$$

Разделяя переменные, находим, что радиальное распределение материи описывается следующим уравнением (здесь отброшено, в силу его малости, последнее слагаемое в уравнении (10)):

$$-\frac{\lambda_1 \omega^2}{c^2} \psi - |\lambda_2| \left( \psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r - \frac{l^2}{r^2} \psi - k_z^2 \psi \right) - \lambda k_\rho^2 \psi + 2g^1 c^{-1} \omega k_\rho \psi - 2g^z k_z k_\rho \psi = 0 \quad (12)$$

Рассмотрим решения уравнение (12) в том случае, когда можно пренебречь влиянием гравитации, т.е.  $\lambda_1 \approx -\lambda_2 \approx 1$ , но  $\lambda = 1 + g_1^2(1 - u^2) \neq 1$ . При этих условиях уравнение (16) приводится к виду

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \psi - \left( \psi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_r - \frac{l^2}{r^2} \psi - k_z^2 \psi \right) - \lambda k_\rho^2 \psi + 2g^1 c^{-1} \omega k_\rho \psi - 2g^z k_z k_\rho \psi = 0 \quad (13)$$

В общем случае решение уравнения (13) можно представить в форме степенного ряда [10-11]

$$\psi = \frac{\exp(-\tilde{r})}{\tilde{r}^a} \sum_{j=0}^n c_j \tilde{r}^j \quad (14)$$

Здесь обозначено  $\tilde{r} = r / r_n$ . Подставляя выражение (14) в уравнение (13), находим

$$\begin{aligned}
& (a^2 - l^2 + \kappa_u) \sum_{j=0}^n c_j \tilde{r}^{j-2} + (2a - 1 + \kappa_g r_n) \sum_{j=0}^n c_j \tilde{r}^{j-1} + \\
& (1 - k_z^2 r_n^2 + K^2 r_n^2) \sum_{j=0}^n c_j \tilde{r}^j - \sum_{j=0}^n j c_j \tilde{r}^{j-1} - 2a \sum_{j=0}^n j c_j \tilde{r}^{j-2} + \\
& \sum_{j=0}^n c_j j(j-1) \tilde{r}^{j-2} = 0
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\kappa_u = (1 - u^2) k_\rho^2 \varepsilon^2 / k^2, \quad K^2 = k_\rho^2 + \omega^2 / c^2, \quad \kappa_g = -2\varepsilon k_\rho (k_z u_z + \omega / c) / k > 0.$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\tilde{r} = r / r_n$ , получим уравнения, связывающие параметры модели в случае возбужденных состояний

$$a = \sqrt{l^2 - \kappa_u}, \quad r_n = \frac{n+1-2a}{\kappa_g}, \quad \frac{1}{r_n^2} - k_z^2 + k_\rho^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{16}$$

Второе уравнение (16) выполняется лишь для таких значений показателя степени, для которых справедливо неравенство  $2a < n+1$ . Отсюда находим уравнение для определения уровней энергии

$$\frac{4\varepsilon^2 k_\rho^2}{k^2 (n+1-2a)^2} \left( k_z u_z + \frac{\omega}{c} \right)^2 - k_z^2 + k_\rho^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \tag{17}$$

Уравнение (17) было использовано для моделирования энергии связи нуклонов в ядрах для всей совокупности известных нуклидов [10-11]. В модели [10-11] ядро состоит из «чистых» протонов, взаимодействующих со скалярным полем. Часть «чистых» протонов экранируется, образуя  $N$  нейтронов, в результате возникает атом, состоящий из электронной оболочки и ядра с электрическим зарядом  $eZ$ , числом нуклонов  $A = Z + N$  и массой  $\Delta M = A(m_p + m_e) - E_{bp} / c^2$ , где  $E_{bp}$  - энергия связи нуклонов в ядре, вычисляемая по общему числу нуклонов, обладающих суммарной массой электрона и протона. Отметим, что способ выражения энергии связи не является существенным, поэтому можно ограничиться и стандартным выражением превышения массы в атомных единицах. Поскольку в этой задаче фигурирует два типа зарядов – скалярный и векторный, эффект экранирования проявляется не только в отношении скалярного заряда (что приводит к образованию нейтронов), но и в отношении векторного заряда, что приводит к образованию нуклонов.

Следует заметить, что исходная метрика в пятимерном пространстве определяется метрическим тензором, который зависит только от параметров центрального тела, т.е. от суммарного заряда и суммарной массы нуклонов. В зависимости от комбинации заряда и массы в ядре могут образоваться различные оболочки:

- 1) нуклонная оболочка, в которой все заряды экранированы, следовательно  $\varepsilon / k = A^2 e^2 / A m_p c^2 = A e^2 / m_p c^2$ ;
- 2) нейтронная оболочка, в которой  $\varepsilon / k = N e^2 / m_p c^2$ ;
- 3) протонная оболочка, в которой  $\varepsilon / k = Z e^2 / m_p c^2$ .

Используя массу электрона и постоянную Планка, определим безразмерные параметры модели в виде

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad S = \frac{(\hbar k_p)^2}{(m_e c)^2}, \quad P = \frac{\hbar k_z}{m_e c}, \quad E = \frac{\hbar \omega}{m_e c^2}$$

$$b_{nl}^X = \frac{4X^2 (\alpha m_e / m_p)^2}{\left( n + 1 - 2\sqrt{l^2 - (1 - u^2) S X^2 (\alpha m_e / m_p)^2} \right)^2} \quad (18)$$

Здесь  $X = A, N, Z$  в случае нуклонной, нейтронной или протонной оболочки соответственно.

Разрешая уравнение (17) относительно энергии, находим

$$E_{nl}^X = \frac{-Sb_{nl}^X Pu \pm i\sqrt{(Sb_{nl}^X Pu)^2 + (Sb_{nl}^X + 1)(S - P^2 + Sb_{nl}^X P^2 u^2)}}{(Sb_{nl}^X + 1)} \quad (19)$$

Заметим, что параметр энергии в уравнении (19) может принимать как вещественные, так и комплексные значения, которые соответствуют состояниям с конечным временем жизни. Учитывая, что для большинства нуклидов время распада является достаточно большой величиной, можно предположить, что мнимая часть числа в правой части уравнения (19) является малой величиной, что соответствует малой величине подкоренного выражения. Отсюда находим, что для этих состояний справедливо следующее соотношение между параметрами

$$P^2 = \frac{S(Sb_{nl}^X + 1)}{1 + Sb_{nl}^X (1 - u^2)} \quad (20)$$

Подставляя выражение импульса в уравнение (19), имеем

$$E_{nl}^X = \frac{S^{3/2} b_{nl}^X u}{\sqrt{(Sb_{nl}^X + 1)(1 + Sb_{nl}^X (1 - u^2))}} \quad (21)$$

Отсюда находим зависимость энергии связи на один нуклон в основном состоянии [http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR\\_1\\_7\\_2012.pdf](http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR_1_7_2012.pdf)

$$E_{0a}^X / A = \frac{S^{3/2} b_0 u X^2 / A}{\sqrt{(S b_0 X^2 + 1)(1 + S b_0 X^2 (1 - u^2))}} \quad (22)$$

Здесь обозначено  $b_0 = (2\alpha m_e / m_p (1 - 2\alpha))^2$ . Таким образом, мы установили связь энергии состояния с параметрами взаимодействия. Отметим, что состояния (22) зависят от величины векторного заряда, который фигурирует в уравнениях (5)-(6). В работе [11] показано, что в этом проявляется различие между взаимодействием нуклонов в ядрах, где параметр  $u \neq 0$ , и взаимодействием электронов с атомными ядрами, в котором  $u = 0$ .

Уравнение (22) позволяет описать зависимость энергии связи от числа нуклонов для всех нуклидов. Расчетная модель строится следующим образом. Предположим, что на основе уравнения (22) удалось достаточно точно определить энергию связи одного из изотопов данного элемента. Без ограничения общности можно считать, что это изотоп, содержащий минимальное число нейтронов. Тогда энергия связи всех других изотопов данного элемента определяется согласно

$$\frac{E(N, Z)}{A} = \frac{E_{0a}^A(N_{\min}, Z)}{Z + N_{\min}} + \frac{E_{0a}^N(N, Z)}{Z + N} - \frac{E_{0a}^N(N_{\min}, Z)}{Z + N_{\min}} \quad (23)$$

Модель (23) содержит произвол в выборе параметра взаимодействия  $Sb_0$ . Далее без ограничения общности положим  $Sb_0 = 1$ , что соответствует выбору масштаба импульса в пятом измерении, фигурирующего в уравнениях (11)-(17).

### **Сравнение моделей энергии связи нуклонов**

Рассмотрим три модели энергии связи нуклонов. Стандартная полуэмпирическая модель Вайцеккера имеет вид [13]:

$$E_b = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z^2 A^{-1/3} - a_A (N - Z)^2 A^{-1} + a_5 A^{-3/4} \quad (24)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (24) описывает рост энергии связи обусловленный увеличением объема системы; второе слагаемое связано с вкладом поверхностной энергии, третье слагаемое описывает вклад электрического заряда протонов; четвертое слагаемое обусловлено вкладом энергии Ферми системы нуклонов; наконец, пятое слагаемое описывает парное взаимодействие. Поскольку модель (24) зависит от 5 параметров, а модель (23) только от трех, зафиксируем два параметра в уравнении (24). Во-первых, положим  $a_s = 17.23$ , что согласуется с известными



данными [6]. Во-вторых, положим  $a_5 = 0$ , что связано со спецификой решаемой задачи, в которой параметры модели определяются локально при заданной величине заряда ядра, а в этом случае нет достаточного числа данных для определения этого параметра. Следовательно, необходимо определить три параметра модели –  $a_v, a_c, a_A$  в зависимости от числа протонов  $Z$ .

5D модель энергии связи (23) зависит от трех параметров. При заданном числе протонов ее можно представить в виде

$$E_b / A = a + \frac{bN^2 / A}{\sqrt{(N^2 + 1)(1 + k(gN)^2)}} \quad (25)$$

Задача заключается в том, чтобы найти значения параметров модели (25)  $a, b, g$  в зависимости от числа протонов  $Z$ .

Информационная модель энергии связи основывается на выражении изменения энергии термодинамической системы

$$dE = TdS - PdV$$

Можно предположить, что в случае ядра вклад давления и объема описывается первым слагаемым в правой части уравнения (24), а энтропия системы изменяется с ростом числа нейтронов подобно энтропии дискретного множества [12], следовательно

$$E_b / A = a_1 + b_1(N / A)(-\ln(N / A) + g_1) \quad (26)$$

Коэффициенты трех моделей (24)-(26) были вычислены в системе [8] для изотопов всех химических элементов на основе следующей процедуры (В Приложении приведен пример для модели (24)) Отметим, что в системе [8] имеется встроенная БД изотопов IsotopeData[], и процедуры нахождения параметров линейных и нелинейных моделей - Fit, FindFit, NonlinearModelFit и другие. Модель (25) является жесткой, поэтому при вычислении ее параметров вводится численный коэффициент  $k$ , обеспечивающий сходимость решения задачи (смотрите приведенный ниже пример). Модель (26) может быть использована без изменения, но в некоторых случаях на начальной итерации следует заменить знак перед логарифмом на противоположный знак.

Три модели можно сравнить с экспериментальными данными (в Приложении приведен соответствующий код). Результаты сравнения трех моделей представлены на

рис 1-3 для изотопов O, F, Fe, Ni, Pt, Au кривыми разного цвета – зеленым, красным и синим для моделей (24), (25), (26) соответственно.

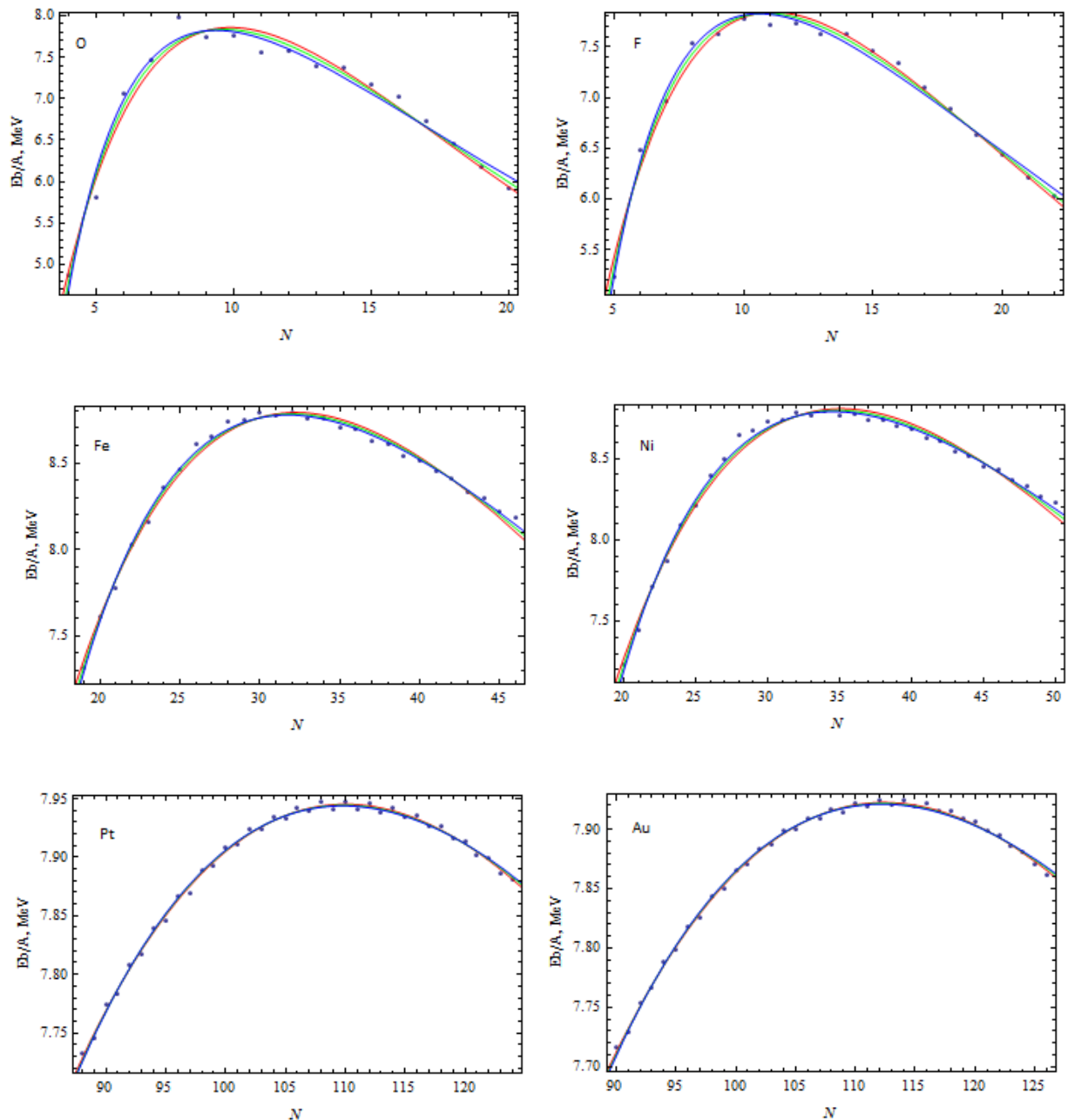


Рис. 1. Сравнение трех моделей для изотопов O, F, Fe, Ni, Pt, Au: зеленая линия - модель Вайцзеккера; красная – 5D модель; синяя – информационная модель.

Параметры трех моделей, вычисленные для числа протонов от 4 до 94 сведены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры моделей (24), (25) и (26).

Z	a	b	g	a1	b1	g1	av	ac	aA
4	-3.62481	27.327	0.0422609	-20.4234	51.3442	0.355978	14.7091	-0.449354	15.4203
5	-2.52089	23.6371	0.0247448	-14.204	39.0915	0.361751	13.8749	-0.548336	12.7719
6	-2.68681	25.3876	0.0165681	-19.5433	50.4696	0.366144	14.4986	-0.1836	14.5216
7	-3.85908	28.2342	0.0114133	-26.5208	63.2546	0.378508	14.8815	0.262532	16.6353
8	-3.79443	28.7792	0.0086387	-29.0956	68.485	0.382158	15.1319	0.377706	17.331
9	-4.02073	29.1897	0.0067492	-31.347	72.4102	0.38568	15.0451	0.461668	17.8339
10	-3.90832	29.5351	0.0055812	-32.327	74.7037	0.384548	15.066	0.447392	18.1195
11	-4.34471	30.6186	0.0045588	-34.9852	79.4571	0.387794	15.1316	0.538501	18.9135
12	-4.75363	32.0398	0.0037947	-34.9742	79.891	0.386432	15.2473	0.556375	19.3312
13	-4.49257	31.4826	0.0032596	-34.4678	78.9237	0.387226	15.0955	0.520236	19.0377
14	-4.86299	32.9161	0.0028544	-33.7932	78.1938	0.38417	15.1093	0.489994	19.3225
15	-4.92823	32.9845	0.0024462	-34.6704	79.514	0.38844	15.1402	0.532441	19.4656
16	-4.57793	32.2025	0.0021184	-34.6231	79.3658	0.391189	15.1662	0.53731	19.208
17	-4.4887	31.7784	0.0018284	-34.6721	79.0368	0.396352	15.1746	0.568718	19.024
18	-4.20688	31.1873	0.0016155	-34.0293	77.7887	0.398887	15.1715	0.559632	18.6967
19	-4.56505	32.023	0.0014452	-35.2885	79.9604	0.400381	15.1961	0.58579	19.1674
20	-4.64648	32.4197	0.0013115	-35.6665	80.765	0.400448	15.2171	0.580203	19.3655
21	-5.26814	33.8858	0.00119	-38.196	85.348	0.400375	15.2774	0.617602	20.2984
22	-5.67551	35.0752	0.0010958	-40.1961	89.2201	0.398872	15.3419	0.628125	21.0693
23	-6.05237	35.9337	0.0009984	-41.5921	91.6283	0.400196	15.3843	0.651503	21.5696
24	-6.11985	36.2127	0.0009177	-41.99	92.3902	0.400701	15.4094	0.648387	21.7216
25	-6.24784	36.4664	0.0008418	-42.4793	93.1508	0.401959	15.4076	0.653399	21.8633
26	-6.28165	36.6336	0.0007779	-41.7491	91.9181	0.401584	15.3744	0.633746	21.7385
27	-5.91711	35.5786	0.0007103	-40.9674	90.2611	0.403841	15.3089	0.622372	21.2347
28	-5.78781	35.2243	0.0006501	-39.7398	87.903	0.405936	15.3041	0.614025	20.8196
29	-4.99568	33.1639	0.0006016	-39.4301	87.1016	0.408116	15.1827	0.590204	20.1834
30	-4.57451	32.0833	0.0005569	-38.1885	84.7455	0.409463	15.0929	0.566158	19.6017
31	-4.63175	32.0402	0.0005134	-38.5366	85.1258	0.411775	15.099	0.577839	19.6222
32	-4.63363	32.0235	0.0004795	-38.6924	85.3594	0.412437	15.0928	0.575169	19.6399
33	-4.89913	32.5176	0.0004462	-39.7378	87.0587	0.413959	15.1314	0.593458	19.9647
34	-4.92286	32.5903	0.0004204	-42.1626	91.2954	0.415514	15.2229	0.61443	20.4833
35	-5.32932	33.4376	0.0003932	-43.7459	93.9747	0.416771	15.2993	0.639397	21.0178
36	-5.73261	34.4072	0.0003708	-45.5038	97.1115	0.417121	15.4002	0.659816	21.6395
37	-6.02828	35.0052	0.0003487	-46.3959	98.5568	0.418232	15.4387	0.673052	21.9657
38	-6.30199	35.6495	0.0003294	-47.6848	100.826	0.418783	15.5158	0.686486	22.3972
39	-5.99714	34.8385	0.0003117	-47.4196	100.218	0.419675	15.4344	0.670048	22.0897
40	-5.80949	34.4269	0.0002976	-46.5407	98.6955	0.419209	15.3424	0.644418	21.7953
41	-5.29964	33.138	0.0002831	-45.367	96.4927	0.41975	15.1905	0.61341	21.1702
42	-5.18736	32.8917	0.0002706	-44.7795	95.4757	0.419392	15.1213	0.594908	20.9812
43	-4.72927	31.7071	0.0002573	-43.0526	92.2911	0.419885	14.9618	0.56367	20.276
44	-4.68112	31.5894	0.0002456	-42.7163	91.6774	0.420027	14.925	0.553454	20.1688
45	-4.30091	30.5779	0.0002333	-40.9962	88.4722	0.420954	14.787	0.528102	19.5122
46	-3.98847	29.8081	0.0002226	-39.6453	86.0108	0.421472	14.688	0.506142	19.0082
47	-3.01173	27.3123	0.0002095	-36.5769	80.3064	0.423684	14.4568	0.463584	17.6412
48	-2.82675	26.8101	0.0001988	-35.6621	78.5572	0.425169	14.4103	0.454071	17.2941

49	-2.64241	26.2272	0.0001878	-34.8193	76.8483	0.427347	14.3553	0.447902	16.9268
50	-2.75243	26.3929	0.0001774	-35.0131	77.0089	0.429706	14.4058	0.458403	16.982
51	-3.10147	27.0323	0.0001675	-36.9114	80.0647	0.432777	14.5294	0.489927	17.5059
52	-4.1087	29.2927	0.0001595	-40.8443	86.8587	0.434208	14.8168	0.548111	18.9091
53	-4.88685	30.9368	0.0001512	-44.1034	92.3213	0.436673	15.0542	0.599221	19.986
54	-5.77758	32.9822	0.0001456	-47.6512	98.5393	0.436678	15.2876	0.642985	21.2657
55	-6.49219	34.5295	0.0001395	-50.793	103.932	0.437431	15.4808	0.68223	22.3091
56	-6.55646	34.6463	0.0001344	-50.8494	103.993	0.437599	15.4654	0.677452	22.3435
57	-6.71471	34.8831	0.0001287	-51.7677	105.403	0.439024	15.5096	0.688154	22.5647
58	-6.77462	34.9917	0.0001243	-51.8113	105.447	0.43912	15.4913	0.682866	22.5949
59	-6.61779	34.5162	0.0001194	-50.9097	103.723	0.439992	15.4053	0.669129	22.2552
60	-6.64243	34.5196	0.0001151	-51.3111	104.33	0.440713	15.414	0.669337	22.3221
61	-6.5384	34.155	0.0001105	-50.6191	102.949	0.441853	15.3515	0.660245	22.0511
62	-6.571	34.1944	0.0001069	-50.5155	102.727	0.442029	15.3256	0.654196	22.0297
63	-6.54571	34.0061	0.0001026	-50.1268	101.863	0.44335	15.2915	0.650338	21.8645
64	-6.60085	34.0906	9.923E-05	-51.0797	103.449	0.443885	15.3239	0.654754	22.0742
65	-6.50471	33.7317	9.524E-05	-50.3913	102.047	0.445361	15.272	0.647954	21.799
66	-6.38636	33.4135	9.218E-05	-49.6857	100.758	0.445726	15.2046	0.635322	21.5537
67	-6.25463	32.9776	8.857E-05	-48.8482	99.1038	0.447197	15.1396	0.626537	21.2265
68	-5.86922	32.0605	8.596E-05	-47.5027	96.7233	0.447365	15.0027	0.602623	20.6984
69	-5.54572	31.1761	8.249E-05	-45.8781	93.681	0.449166	14.8826	0.585267	20.0847
70	-5.1355	30.2033	8.013E-05	-44.3569	91.0016	0.449317	14.7324	0.560059	19.5073
71	-5.13124	30.0637	7.707E-05	-44.2486	90.6327	0.450782	14.7158	0.559955	19.4139
72	-5.1398	30.0561	7.505E-05	-44.8237	91.6306	0.45047	14.7088	0.558424	19.5368
73	-5.08636	29.7848	7.199E-05	-44.3017	90.492	0.452533	14.6794	0.556499	19.3111
74	-5.15849	29.8641	6.949E-05	-44.7317	91.095	0.4538	14.7085	0.56144	19.3941
75	-5.18135	29.7528	6.652E-05	-44.5443	90.5021	0.456279	14.7143	0.56513	19.2703
76	-4.81392	28.8112	6.396E-05	-42.837	87.3653	0.458217	14.5937	0.546876	18.628
77	-4.739	28.4772	6.119E-05	-42.4773	86.4801	0.46079	14.5782	0.547303	18.4114
78	-4.3432	27.458	5.861E-05	-40.8502	83.4595	0.463247	14.4649	0.530748	17.7622
79	-4.11711	26.7572	5.566E-05	-40.1393	81.9009	0.46695	14.4327	0.528879	17.367
80	-5.44848	29.7541	5.483E-05	-45.8294	91.7441	0.465145	14.85	0.591188	19.3432
81	-6.3089	31.5529	5.29E-05	-50.0175	98.6963	0.466802	15.1852	0.643356	20.6374
82	-7.35854	33.897	5.192E-05	-54.2297	105.945	0.465925	15.4981	0.688685	22.1181
83	-10.6838	41.2669	5.081E-05	-69.5929	132.156	0.465622	16.6923	0.86676	27.1828
84	-12.0013	44.1892	4.977E-05	-75.7497	142.678	0.465302	17.1429	0.930859	29.2048
85	-14.341	49.3045	4.842E-05	-87.2432	162.142	0.465986	18.0281	1.06011	32.8569
86	-13.1541	46.6637	4.754E-05	-57.8229	112.377	0.461763	17.588	0.991697	31.3175
87	-12.0067	44.0411	4.647E-05	-10.9011	33.4322	0.416778	17.1993	0.933971	29.8626
88	-10.7392	41.227	4.573E-05	-33.0918	70.7649	0.449922	16.6866	0.857065	28.0244
89	-9.3985	38.2087	4.493E-05	-0.240897	15.592	0.333918	16.162	0.781219	26.1047
90	-7.66393	34.3582	4.437E-05	1.39374	12.7593	0.305706	15.468	0.680812	23.5375
91	-6.60717	31.912	4.33E-05	1.25935	12.7706	0.319387	15.048	0.622713	21.8927
92	-5.29195	28.9599	4.261E-05	4.6173	7.29986	0.171406	14.5418	0.55151	19.9757
93	-10.3571	39.5927	3.857E-05	5.70092	5.94733	0.0177703	16.745	0.867284	27.4873
94	-10.6928	40.2478	3.754E-05	6.13997	5.31963	-0.0623392	16.8843	0.884977	27.9953

В Приложении приведены тексты программ, позволяющих вычислить и нанести на график зависимости параметров моделей от числа протонов – рис. 2-4. Параметры всех трех моделей изменяются с числом протонов. Поскольку 5D модель является жесткой, для нее используется введенный выше коэффициент  $k$ , обеспечивающий сходимость решения в зависимости от числа протонов в виде  $k = 0.9592 / Z^{2.209}$ . Приведенный на рис. 3 параметр  $g$  вычисляется относительно этого коэффициента.

Анализируя данные, приведенные в таблице 2 и на рис. 2-4, можно сделать вывод, что не существует универсальной модели, описывающей всю совокупность нуклидов. Из данных, приведенных на рис. 1, следует, что все три модели одинаково хорошо описывают энергию связи изотопов отдельных элементов. В этом смысле модель Вайцзеккера ничем не выделена, поэтому не может рассматриваться как универсальная модель, даже с учетом слагаемого, описывающего парные взаимодействия.

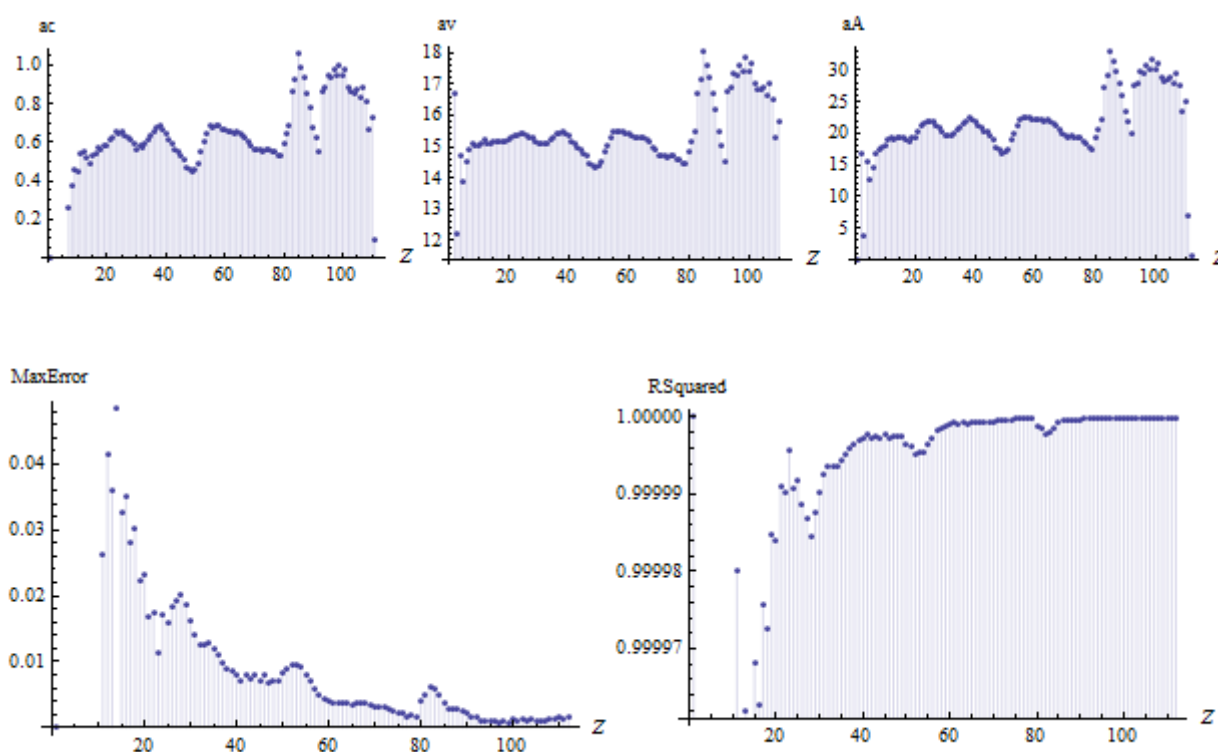


Рис. 2. Зависимость параметров модели Вайцзеккера от числа протонов; на нижних рисунках показаны величина среднеквадратичного отклонения  $RSquared$  и максимальная абсолютная ошибка предсказания энергии связи -  $MaxError$ .

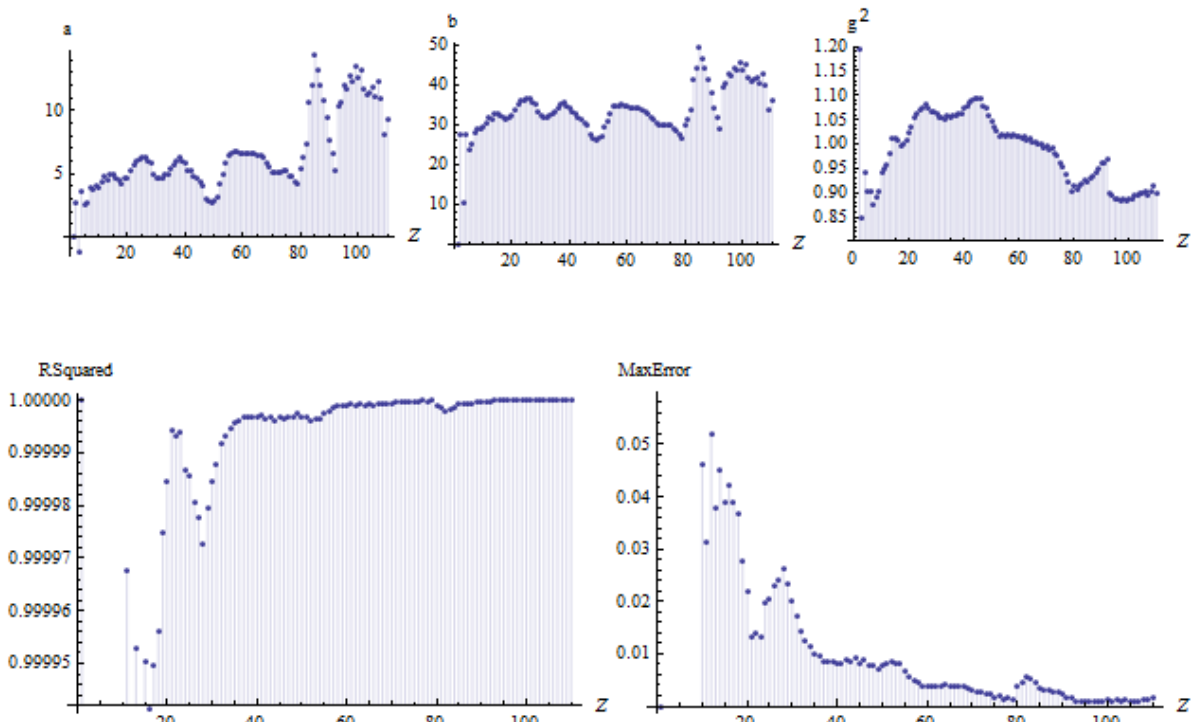


Рис 3. Зависимость параметров 5D модели от числа протонов.

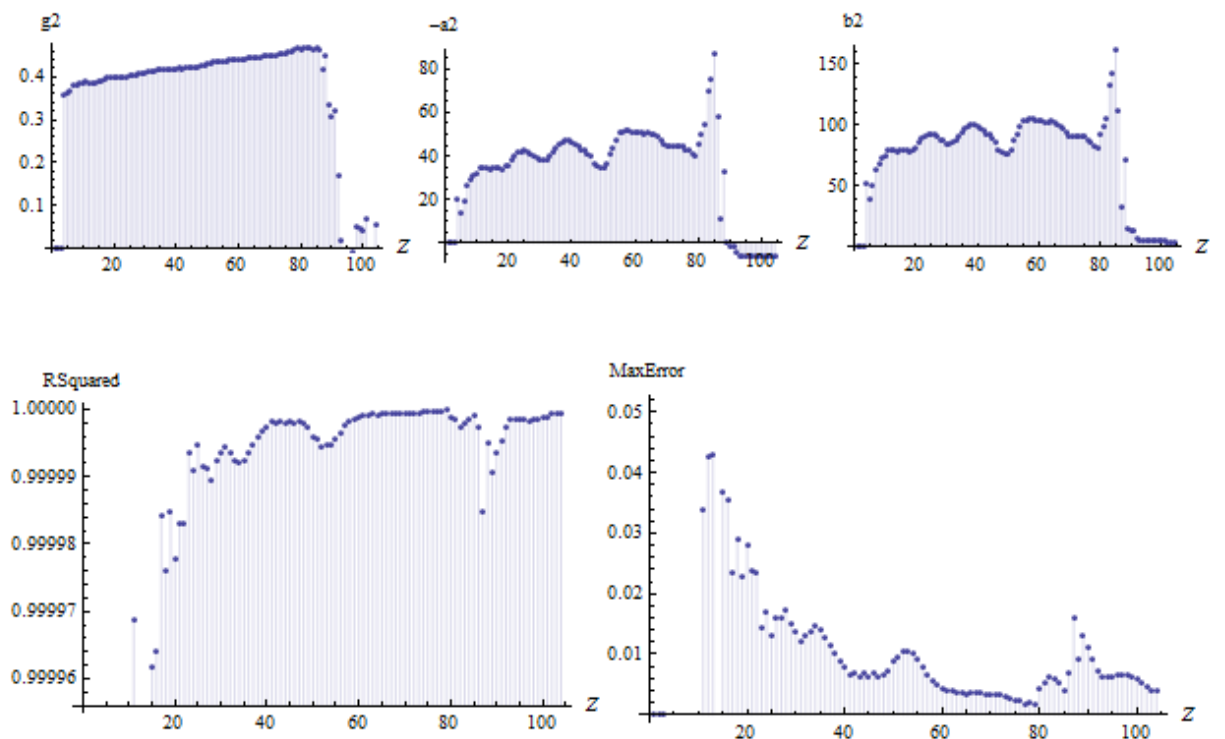


Рис. 4. Зависимость параметров информационной модели от числа протонов.

Отметим сходство в поведении параметров трех моделей: параметры достигают экстремальных значений при одних и тех же или близких значениях  $Z$  – таблица 3. Эти результаты указывают на наличие структуры ядер, однако точки экстремумов не совпадают с магическими числами протонов - 2, 8, 20, 28, 50, 82, определенными в стандартной модели ядерных оболочек [3-6]. Аналогичный результат был получен в работе [11], в которой вычислялись локальные параметры 5D модели в зависимости от числа нейтронов. Как оказалось, числа нейтронов, соответствующие экстремальным значениям параметров 5D модели, близки к магическим числам, но нигде с ними не совпадают.

Таблица 3. Экстремальные значения параметров трех моделей

Z	a	b	a1	b1	av	aA
5	-2.52089	23.6371	-14.204	39.0915	13.8749	12.7719
18	-4.20688	31.1873	-34.0293	77.7887	15.1715	18.6967
25			-42.4793	93.1508	15.4076	21.8633
26	-6.28165	36.6336				
31	-4.63175		-38.5366	85.1258		19.6222
32		32.0235			15.0928	
38	-6.30199	35.6495	-47.6848	100.826	15.5158	22.3972
49	-2.64241	26.2272	-34.8193	76.8483	14.3553	16.9268
58	-6.77462	34.9917	-51.8113	105.447	15.4913	22.5949
79	-4.11711	26.7572	-40.1393	81.9009	14.4327	17.367
85	-14.341	49.3045	-87.2432	162.142	18.0281	32.8569
92	-5.29195	28.9599	4.6173	7.29986	14.5418	19.9757

В этой связи отметим в таблице 3 и на рис. 2-4 три экстремума, которые приходятся на элементы  $Z=31,32,85$  – Ga (галлий), Ge (германий), At (астат). Галлий и германий были предсказаны Д.И. Менделеевым в 1870 г, а открыты в 1875 и 1885 соответственно. Астат, предсказанный Д.И. Менделеевым как эка-йод, был синтезирован искусственно только в 1940.

Отметим еще три экстремума, приходящиеся на  $Z=26, 79, 92$  – Fe(железо), Au (золото) и U(уран). Нет сомнения, что железо явно выделено в природе и давно используется в человеческой практике. Роль золота и урана в человеческой истории трудно переоценить. Интересно также, что только в 5D модели энергии связи один из экстремумов приходится на элемент с числом протонов  $Z=26$  – железо. Можно предположить, что существует такой вариант периодической таблицы, в которой периоды связаны с трендом, представленным на рис. 2-4 и в таблице 2.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что периодические свойства ядер атомных элементов зависят от числа протонов (заряда), в полном соответствии с современной формулировкой периодического закона [14]. Ранее было установлено [11], что периодические свойства ядер зависят и от числа нейтронов, что нашло свое отражение в оригинальной формулировке периодического закона Менделеева. В Приложении даны тексты программ для вычисления зависимости параметров моделей от числа нейтронов – рис. 5-6. Модель Вайцеккера в этом случае используется без изменения, а 5D модель принимает вид

$$E_b / A = a + \frac{bZ^2 / A}{\sqrt{(Z^2 + 1)(1 + k(gZ)^2)}} \quad (27)$$

Поскольку 5D модель является жесткой, в ней используется численный коэффициент  $k$ , обеспечивающий сходимость решения в зависимости от числа нейтронов в виде  $k = 0.0025 - 0.0003 \ln N$ .

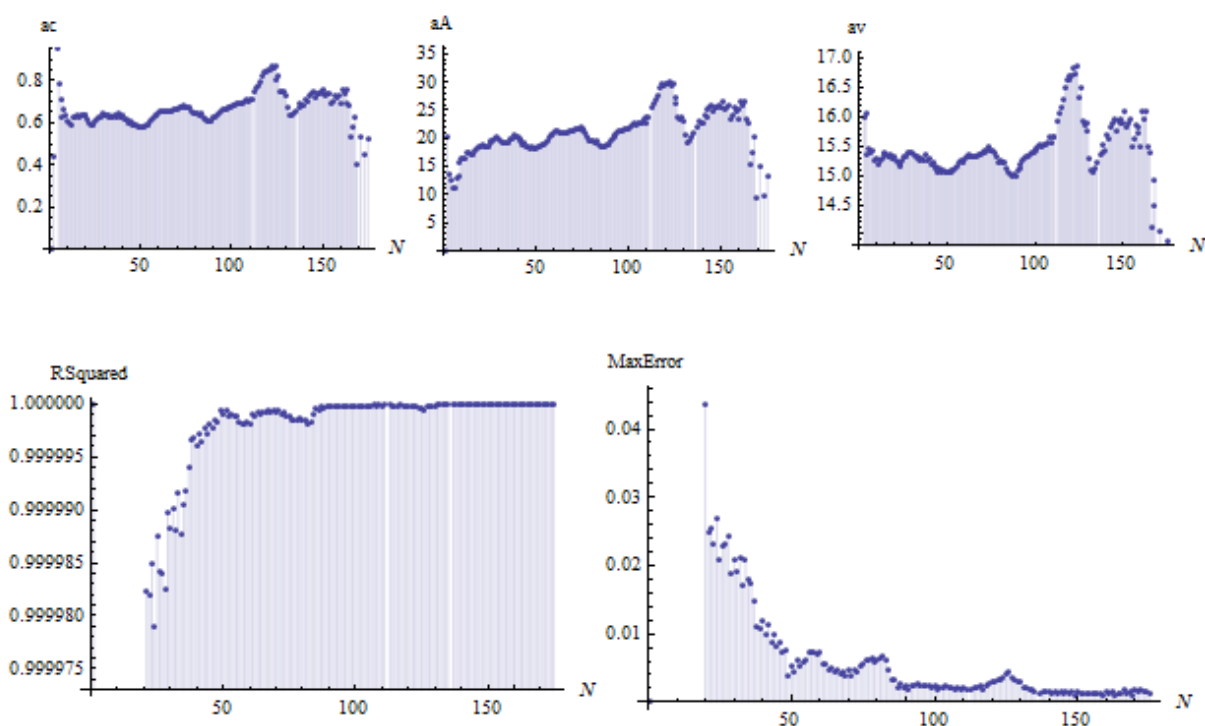


Рис. 5. Зависимость параметров модели Вайцеккера от числа нейтронов; на нижних рисунках показана величина среднеквадратичного отклонения и максимальная абсолютная ошибка предсказания энергии связи.

Из данных, приведенных на рис. 5 следует, что параметры модели Вайцеккера зависят от числа нейтронов, причем эти зависимости не являются монотонными, что свидетельствует о наличии структуры ядер. Таким образом, мы показали, что энергия [http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR\\_1\\_7\\_2012.pdf](http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR_1_7_2012.pdf)



связи всех известных нуклидов может быть описана с приблизительно одинаковой погрешностью любой из трех моделей. Это означает, что атомное ядро можно рассматривать и как заряженную каплю жидкости (модель Вайцеккера), и как совокупность экранированных «чистых» протонов в пятимерном пространстве [10-11], и как статистическую (информационную) систему [12].

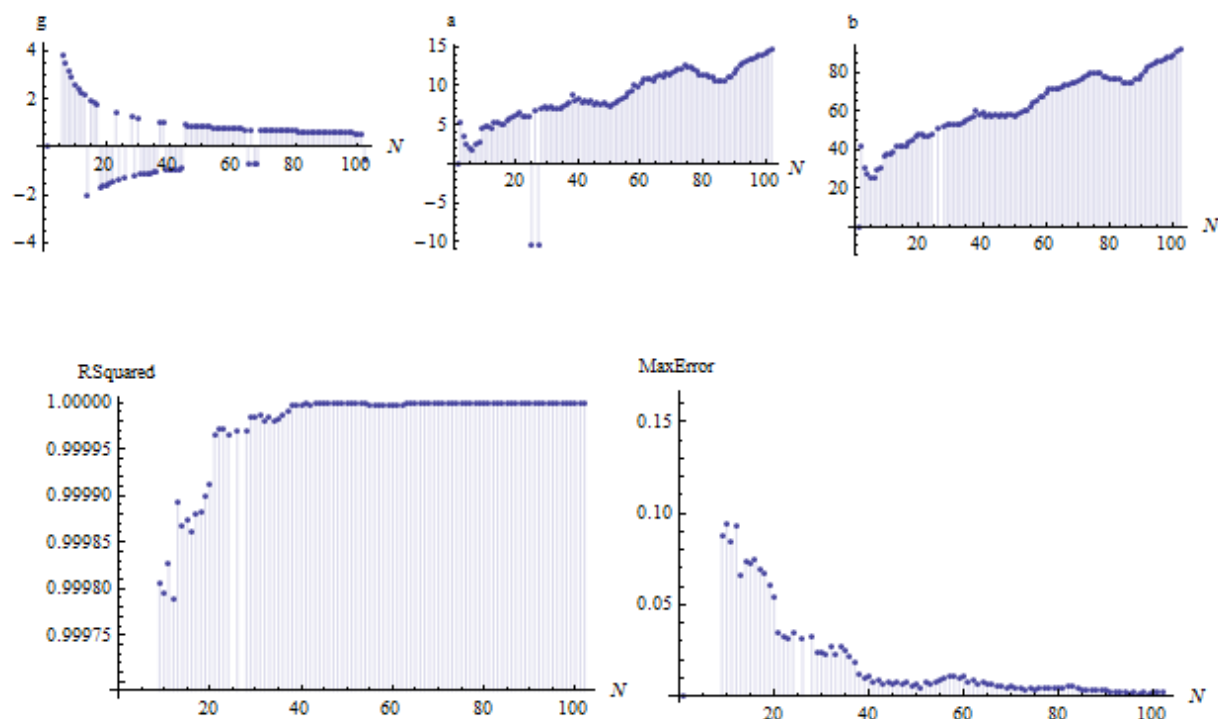


Рис 6. Зависимость параметров 5D модели от числа нейтронов.

Отметим, что капельная модель ядра получила большое развитие в 30-50-х годах прошлого века. С другой стороны, 5D модель была теоретически обоснованна в работах Калуцы [15], Эйнштейна [16-19], Паули и Эйнштейна [20], Румера [21], Джунушалиева [22], в наших статьях [9-11] и других. Информационная модель ядра также обладает большим потенциалом в плане ее расширения с учетом спина, момента и других квантовых чисел, а также квантового хаоса [6-7, 23-24].

*Автор выражает благодарность профессору В. Д. Джунушалиеву и профессору Е. В. Луценко за полезные обсуждения.*

## References

1. Менделеев Д. И., Периодический закон. Основные статьи. — М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 111.
2. Iwanenko, D.D. The neutron hypothesis// Nature, **129**, 1932, 798.
3. Иваненко Д.Д., Периодическая система химических элементов и атомное ядро // Д.И.Менделеев. Жизнь и труды, АН СССР, М., 1957, с.66-100.

4. Гейзенберг В. Замечания к теории атомного ядра// УФН (1), 1936.
5. Maria Goeppert-Mayer. On Closed Shells in Nuclei/ [DOE Technical Report, Phys. Rev. Vol. 74](#); 1948. II [DOE Technical Report, Phys. Rev. Vol. 75](#); 1949
6. P. Leboeuf. Regularity and chaos in the nuclear masses/ Lect. Notes Phys. 652, Springer, Berlin Heidelberg 2005, p.245, J. M. Arias and M. Lozano (Eds.).
7. Jorge G. Hirsch, Alejandro Frank, Jose Barea, Piet Van Isacker, Victor Velazquez. Bounds on the presence of quantum chaos in nuclear masses//Eur. Phys. J. A 25S1 (2005) 75-78
8. Wolfram Mathematica 8// <http://www.wolfram.com/mathematica/>
9. Трунев А.П. Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы-Клейна// Научный журнал КубГАУ. – Краснодар: КубГАУ, 2011. – №07(71). С. 502 – 527. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2011/07/pdf/39.pdf>
10. А. Р. Trunev. The structure of atomic nuclei in Kaluza-Klein theory // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №02(76). С. 862 – 881. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/02/pdf/70.pdf>
11. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И. Менделеева// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(79). С. 414 – 439. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/29.pdf>
12. Луценко Е.В. Количественная оценка уровня системности на основе меры информации К. Шеннона (конструирование коэффициента эмерджентности Шеннона) / Е.В. Луценко // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(79). С. 249 – 304. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/18.pdf>
13. Marcelo Alonso, Edward J. Finn. Fundamental University Physics. III Quantum and Statistical Physics. – Addison-Wesley Publishing Company, 1975.
14. A. Van den Broek. The Number of Possible Elements and Mendelëff's "Cubic" Periodic System// *Nature* **87** (2177), 1911.
15. Kaluza, Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik. [Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. \(Math. Phys.\)](#) **1921**: 966–972.
16. Альберт Эйнштейн. К теории связи гравитации и электричества Калуцы II. (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966)
17. Альберт Эйнштейн, В. Баргман, П. Бергман. О пятимерном представлении гравитации и электричества (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966 статья 121).
18. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, статья 122.
19. A. Einstein, P. Bergmann. Generalization of Kaluza's Theory of Electricity// *Ann. Math.*, ser. 2, 1938, 39, 683-701 (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966)
20. Einstein A., Pauli W.— *Ann of Phys.*, 1943, v. 44, p. 131. (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, статья 123).
21. Ю. Б. Румер. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат, 1956. 152 с.
22. [V. Dzhunushaliev](#). Wormhole solutions in 5D Kaluza-Klein theory as string-like objects// [arXiv:gr-qc/0405017v1](http://arXiv:gr-qc/0405017v1)
23. Vladimir Zelevinsky. Quantum Chaos and nuclear structure// *Physica E*, 9, 450-455, 2001.
24. Трунев А.П. Бифуркация энергии связи и хаос в атомных ядрах// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского

государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(79). С. 403 – 413. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/28.pdf>, 0,688 у.п.л.

### Приложение

Текст программы для вычисления параметров трех моделей — таблица 2:

```
Do[ model = av - 17.23*(Z + x)^(-1/3) + ac*(Z*Z)*(Z + x)^(-4/3) + aA*(x - Z)^2*(Z + x)^(-2);

Eb = Table[IsotopeData[#, prop], {prop, {"NeutronNumber", "BindingEnergy"}}] & /@ IsotopeData[Z];

nlm = FindFit[Eb, model, {{ av, 15.5}, {ac, -.628528}, {aA, -22.03}}, x]; Print[Z, nlm], {Z, 1, 118}]
```

Текст программы для сравнения трех моделей — рис. 1:

```
Z = 78; k = 0.000049;

Eb = Table[IsotopeData[#, prop], {prop, {"NeutronNumber", "BindingEnergy"}}] & /@ IsotopeData[Z];

nlm = NonlinearModelFit[Eb, a + b*(x*x/(Z*1. + x))*(x^2 + 1)*(1 + k*(g*x)^2)^(-.5), {a, b, g}, x];

nlm1 = NonlinearModelFit[Eb, av - 17.23*(Z + x)^(-1/3) - ac*(Z*Z)*(Z + x)^(-4/3) - aA*(x - Z)^2*(Z + x)^(-2), {av, ac, aA}, x];

nlm2 = NonlinearModelFit[Eb, a2 + b2*(x/(Z*1. + x))*(-Log[x/(Z*1. + x)] + g2), {a2, b2, g2}, x];

Show[ListPlot[Eb], Plot[{nlm[x], nlm1[x], nlm2[x]}, {x, 1., 180.}, PlotStyle -> {Red, Green, Blue}], Frame -> True,
FrameLabel -> {N, "Eb/A, MeV"}]
```

Текст программы для вычисления зависимости параметров модели Вайцеккера от числа протонов (рис. 2):

```
para = {0.}; para = {0.}; parc = {0.}; RSq = {1.}; MaxEr = {0.};

Do[ Eb = DeleteCases[Table[IsotopeData[#,prop], {prop, {"NeutronNumber", "BindingEnergy"}}] & /@
IsotopeData[Z], {_, Missing["Unknown"]];

nlm = NonlinearModelFit[Eb, av - 17.23*(Z + x)^(-1/3) - ac*(Z*Z)*(Z + x)^(-4/3) - aA*(x - Z)^2*(Z + x)^(-2), {av, ac, aA}, x];

RSq = {RSq, nlm["RSquared"]} // Flatten;

MaxEr = {MaxEr, Last[Sort[nlm["MeanPredictionErrors"]]]} // Flatten;

para = {para, av /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten;

parc = {parc, ac /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten;

par = {par, aA /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten, {Z, 2, 112}}

ListPlot[par, Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, aA},
ImageSize -> {200, 200}] ListPlot[para, Filling -> Axis,
AxesLabel -> {Z, av}, ImageSize -> {200, 200}] ListPlot[parc,
Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, ac}, ImageSize -> {200, 200}]

ListPlot[RSq, Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, "RSquared"},
ImageSize -> {300, 300}, DataRange -> Automatic] ListPlot[MaxEr,
Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, "MaxError"},
ImageSize -> {300, 300}, DataRange -> Automatic]
```

Текст программы для вычисления зависимости параметров модели Вайцеккера от числа нейтронов (рис. 5):

```
para = {0.}; para = {0.}; parc = {0.};
Do[model = av - 17.23*(nn + x)^(-1/3) - ac*(x*x)*(nn + x)^(-4/3) -
aA*(x - nn)^2*(x + nn)^(-2);
Eb = Drop[
Cases[DeleteCases[
Table[{a - z, z, IsotopeData[{z, a}, "BindingEnergy"]}, {z, 1,
118}, {a,
IsotopeData[#, "MassNumber"] & /@ IsotopeData[z]}], {_,
Missing["Unknown"]}] // Flatten[#, 1] &, {nn, _, _}],
None, {1}];
nlm = FindFit[Eb, model, {{ av, 15.5}, {ac, 0.628528}, {aA, 22.03}},
```

```
x]; para = {para, av /. nlm} // Flatten;
parc = {parc, ac /. nlm} // Flatten;
par = {par, aA /. nlm} // Flatten, {nn, 2, 175}
ListPlot[par, Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, aA}]
ListPlot[para, Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, av}]
ListPlot[parc, Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, ac}]
```

Текст программы для вычисления зависимости параметров 5D модели от числа протонов (рис.3):

```
par = {0.}; para = {0.}; parc = {0.}; RSq = {1.}; MaxEr = {0.};
Do[ Eb = DeleteCases[Table[IsotopeData[#, prop], {prop, {"NeutronNumber", "BindingEnergy"}}] & /@
  IsotopeData[Z], {_, Missing["Unknown"]];
  nlm = NonlinearModelFit[Eb, a + b*(x*(Z*1. + x))*((x^2 + 1)*(1 + (0.9592/Z^2.209)*(g*x)^2))^(-.5), {a, b, g}, x];
  para = {para, -a /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten;
  RSq = {RSq, nlm["RSquared"]} // Flatten;
  MaxEr = {MaxEr, Last[Sort[nlm["MeanPredictionErrors"]]]} // Flatten;
  parc = {parc, b /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten;
  par = {par, g^2 /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten, {Z, 2, 110}
  ListPlot[par, Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, "g"}, ImageSize -> {200, 200}, PlotRange -> {0.8, 1.2}] ListPlot[para,
  Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, "a"}, ImageSize -> {200, 200}] ListPlot[parc, Filling -> Axis,
  AxesLabel -> {Z, "b"}, ImageSize -> {200, 200}]
  ListPlot[RSq, Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, "RSquared"}, ImageSize -> {200, 200}, DataRange -> Automatic] ListPlot[MaxEr,
  Filling -> Axis, AxesLabel -> {Z, "MaxError"},
  ImageSize -> {200, 200}, DataRange -> Automatic]
```

Текст программы для вычисления зависимости параметров 5D модели от числа нейтронов (рис.6):

```
par = {0.}; para = {0.}; parc = {0.}; RSq = {0.}; MaxEr = {0.};
Do[ Eb = Drop[Cases[DeleteCases[
  Table[{a - z, z, IsotopeData[{z, a}, "BindingEnergy"]}, {z, 1, 118}, {a, IsotopeData[#, "MassNumber"]} & /@ IsotopeData[z]],
  {_, Missing["Unknown"]}] // Flatten[#, 1] &, {nn, _, _}], None, {1}];
  nlm = NonlinearModelFit[Eb, a + b*(x*(nn*1. + x))*((x^2 + 1)*(1 + (0.0025 - 0.0003*Log[nn])*(g*x)^2))^(-.5), {a, b, g}, x];
  para = {para, -a /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten;
  RSq = {RSq, nlm["RSquared"]} // Flatten;
  MaxEr = {MaxEr, Last[Sort[nlm["MeanPredictionErrors"]]]} // Flatten;
  parc = {parc, b /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten;
  par = {par, g /. nlm["BestFitParameters"]} // Flatten, {nn, 2, 102}
  ListPlot[par, Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, "g"},
  ImageSize -> {200, 200}] ListPlot[para, Filling -> Axis,
  AxesLabel -> {N, "a"}, ImageSize -> {200, 200}] ListPlot[parc,
  Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, "b"}, ImageSize -> {200, 200}]
  ListPlot[RSq, Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, "RSquared"},
  ImageSize -> {200, 200}, DataRange -> Automatic] ListPlot[MaxEr,
  Filling -> Axis, AxesLabel -> {N, "MaxError"},
  ImageSize -> {200, 200}, DataRange -> Automatic]
```