Chaos and Correlation
International Journal, June 15, 2013

Проблема Била, квантовая статистика и метрика пространства-времени

Alexander P. Trunev
A&E Trounev IT Consulting, Торонто, Канада

Обсуждается связь квантовой статистики с метрикой пространства-времени. Показано, что в общем случае проблема Била сводится к определению метрики кварков, лептонов и преонов специального вида.

Ключевые слова: МЕТРИКА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ, КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА.

SPACE-TIME METRICS, QUANTUM STATISTICS AND THE BEAL CONJECTURE

Alexander P. Trunev
A&E Trounev IT Consulting, Toronto, Canada

The connection between the Beal's conjecture and quantum statistics, and space-time metrics is discussed.

Keywords: Metrics, Number Theory, Quantum Statistics.

Проблема Била [1] является обобщением последней теоремы Ферма, доказанной в 1995 году [2]. В общем виде эта проблема формулируется следующим образом:

если A, B, C, x, y, t – целые положительные числа и

$$A^x + B^y = C^t,\ x, y, t > 2 \tag{1}$$

то A,B,C имеют общий простой делитель.

В работе [3] установлена связь решений уравнения (1) с квантовыми статистиками Бозе и Ферми. В настоящей работе показано, что метрика пространства, в котором определены решения уравнения (1), совпадает с метрикой преонов, адронов и лептонов [4-5].

Проблема Била и квантовая статистика

Рассмотрим квантовую систему, состоящую из ряда подсистем, которые пронумеруем целым числом $j = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая подсистема характеризуется числом состояний G_j и числом частиц N_j, которые находятся в этих состояниях и обладают энергией ε_j. Определим число возможных способов распределения N_j частиц по G_j состояниям. В случае статистики Ферми в каждом состоянии может находиться не более чем одна частица, поэтому число способов равно [6]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{G_j!}{N_j!(G_j - N_j)!} \tag{2}$$

В случае статистики Бозе в каждом состоянии может находиться любое число частиц, следовательно, число способов равно [6]

$$\Delta\Gamma_j = \frac{(G_j + N_j - 1)!}{N_j!(G_j - 1)!} \tag{3}$$

Энтропия, общее число частиц и энергия системы равны по определению

$$S = \sum_j \ln\Delta\Gamma_j,\ N = \sum_j N_j,\ E = \sum_j \varepsilon_j N_j \tag{4}$$

Найдем числа $n_j = N_j / G_j$, которые соответствуют экстремуму энтропии при условии постоянства общего числа частиц и энергии системы. Если число состояний и число частиц в каждой подсистеме достаточно велико, $N_j, G_j >> 1$, то можно воспользоваться приближенной формулой для логарифма факториала $\ln N_j! \approx N\ln(N/e)$. В этом случае выражение энтропии квантовых систем упрощается и принимает вид:

$$\begin{gathered} S_F = -\sum_j G_j[n_j \ln n_j - (1 - n_j)\ln(1 - n_j)], \\ S_B = \sum_j G_j[(1 + n_j)\ln(1 + n_j) - n_j \ln n_j] \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь первое выражение соответствует энтропии системы фермионов, а второе – системы бозонов.

Используя метод Лагранжа, составим функционал $S_k + \alpha N + \beta E$, где α, β - некоторые постоянные. Экстремум энтропии достигается при условии

$$\frac{\partial}{\partial n_j}(S_k + \alpha N + \beta E) = 0$$

Отсюда находим два типа распределения

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_j) \pm 1} \tag{6}$$

Отметим, что знак плюс соответствует распределению Ферми, а знак минус – распределению Бозе.

Положим, $n_j = A^x / C^t, \alpha + \beta\varepsilon_j = y\ln B - x\ln A$. В этих обозначениях уравнение (1) принимает вид

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_j) + 1} \tag{7}$$

Следовательно, доказана теорема 1: комбинация корней уравнения (1) $n_j(A, C, x, t) = A^x / C^t$ описывается распределением Ферми (7).

Положим $n_j = B^y / A^x, \alpha + \beta\varepsilon_j = t\ln C - y\ln B$. Тогда уравнение (1) приводится к виду

$$n_j = \frac{1}{\exp(\alpha + \beta\varepsilon_j) - 1} \tag{8}$$

Отсюда следует теорема 2: комбинация корней уравнения (1) $n_j(A, B, x, y) = B^y / A^x$ описывается распределением Бозе (8).

Таким образом, установлена связь уравнения (1) с квантовой статистикой.

Уравнение Била и метрика преонов, адронов и лептонов

Рассмотрим центрально-симметричную метрику вида [4-5, 7]

$$\begin{gathered}\Psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j = -dt^2 + e^{2\nu}dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2 \\ \frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -\kappa\sigma \\ \omega^1 = dt, \omega^2 = e^\nu dr, \omega^3 = d\theta, \omega^4 = \sigma d\varphi\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь $\eta_{ij} = \eta^{ij}$ - метрический тензор пространства Минковского сигнатуры $(-+++)$, $\kappa = const$ - гауссова кривизна квадратичной формы $d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2$, Функция $\nu = \nu(r,t)$ определяется путем решения уравнений Янга-Миллса [7]. Среди всех решений уравнений Янга-Миллса, в случае метрики (9), есть такое, которое выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса [7]. В этом случае уравнения модели приводятся к виду:

$$
\begin{aligned}
&A_{\tau\tau} = \frac{1}{2}(A^2 - \kappa^2),\ e^{\nu} = A_{\tau}, \quad \tau = t \pm r + \tau_0 \\
&A = \sqrt[3]{12}\wp(\tau/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3), \\
&b_{11} = -b_{22} = \frac{1}{3}A - \frac{\kappa}{6},\ b_{33} = b_{44} = \frac{1}{6}A - \frac{\kappa}{3},\ b_{12} = b_{21} = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Здесь обозначено: g_2, g_3 - инварианты функции Вейерштрасса, причем $g_2 = \kappa^2\sqrt[3]{12}$; τ_0 – свободный параметр, связанный с выбором начал координат; $b_{ij} + b_{ji} - 2(\eta^{ij}b_{ij})\eta_{ij} = T_{ij}$ - тензор энергии-импульса материи. Отметим, что в этих обозначениях уравнение Эйнштейна имеет вид

$$
b_{ij} + b_{ji} + b\eta_{ij} = R_{ij} \tag{11}
$$

$b = \eta^{ij}b_{ij}$; R_{ij} - тензор Риччи.

В метрике (9-10) можно определить дефект решетки типа пузыря. В области пузыря считаем, что $A^2 = \kappa^2$, а во внешней области решение зададим в виде (10), имеем

$$
\begin{aligned}
&A^2 = \kappa^2,\ e^{\nu} = 0, \quad |\tau| < \tau_0 \\
&A = \sqrt[3]{12}\wp(\tau/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3),\ e^{\nu} = A_{\tau},\ |\tau| > \tau_0
\end{aligned}
\tag{12}
$$

На границах пузыря непрерывна функция A и ее первая производная,

$$
\kappa = \sqrt[3]{12}\wp(\tau_0/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3),\ A_{\tau} = 0,\ |\tau| = \tau_0 \tag{13}
$$

Отметим, что метрика во внутренней области пузыря является трехмерной, поскольку не содержит радиальной координаты. Действительно, используя уравнения (9) и (12), находим

$$
\Psi = -dt^2 + d\theta^2 + \cos^2(\sqrt{\kappa}\,\theta + \theta_0)d\varphi^2 \tag{14}
$$

Метрика (14) использовалась для моделирования структуры преонов, кварков и лептонов [5]. Покажем, что вещественные корни x, y, t уравнения (1) при заданных значениях A, B, C > 0 принадлежат пространству, метрика которого локально сводится к метрике (14). Действительно, вычислим полный дифференциал от обеих частей уравнения (1), имеем

$$A^x \ln A dx + B^y \ln B dy = C^t \ln C dt \tag{15}$$

Возведем обе части уравнения (15) в квадрат, в результате получим

$$\begin{aligned} &a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + 2abdxdy = dt^2 \\ &a = A^x \ln A / C^t \ln C,\ b = B^y \ln B / C^t \ln C \end{aligned} \tag{16}$$

Сделаем замену переменных в правой части (14)

$$\begin{aligned} &d\vartheta = a\cos\beta\, dx + b\sin\beta\, dy, \\ &\cos(\sqrt{\kappa}\vartheta + \vartheta_0) d\varphi = b\cos\beta\, dy + a\sin\beta\, dx, \\ &dt \to dt \end{aligned} \tag{17}$$

Тогда метрика (14) преобразуется к виду

$$\Psi = -dt^2 + a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + 2ab\sin(2\beta) dxdy \tag{18}$$

Для согласования выражений (16) и (18) достаточно будет положить $\beta = \pi/4$. Следовательно, мы доказали, что метрика (18) описывает пространство, содержащее поверхность (16), как частный случай

$$\Psi = -dt^2 + a^2 dx^2 + b^2 dy^2 + 2abdxdy = 0$$

Полученные выше результаты показывают, что существует связь уравнения (1) с квантовой статистикой. Следовательно, метрика (18) явно зависит от параметров $n_j(A, C, x, t) = A^x / C^t$ и $n_j(B, C, y, t) = B^y / C^t$, которые подчиняются статистике Ферми (7). Рассмотрим простое обобщение уравнения (1) путем добавления пространственного измерения в виде

$$A^x + B^y + D^z = C^t \tag{19}$$

Очевидно, что и для уравнения (19) можно определить квантовые статистики, а также соответствующую метрику. Эта модель позволяет объяснить происхождение метрики псевдоевклидового пространства

Минковского и пространств Эйнштейна, которые широко используются в современной физике. Отметим, что для полного описания метрики четырехмерного пространства необходимо рассматривать его как четырехмерную поверхность в пространстве пяти измерений типа Калуцы [8]. При этом три пространственных измерения соответствуют трем ферми-системам, например, протонам, нейтронам и электронам.

Используя гипотезу преонов [5, 9-10], можно построить модель пространства-времени на том уровне, где, согласно [11-12], задан шаг решетки Матрицы гипотетической модели нашей Вселенной. В такой модели исходным материалом для построения пространства-времени являются целые числа, которыми пронумерованы узлы решетки. Таким образом, приходим к модели типа (1) и (19).

Наконец, заметим, что установленный нами факт связи последней теоремы Ферма с фундаментальными свойствами Матрицы позволяет понять смысл беспрецедентных интеллектуальных усилий, предпринятых математическим сообществом для доказательства этой теоремы.

References

1. R. Daniel Mauldin. A Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem// Notices of the AMS 44 (11): 1436-1439. 1997.
2. Faltings G . The Proof of Fermat's Last Theorem by R. Taylor and A. Wiles// Notices of the AMS 42 (7), pp.743–746, July 1995.
3. Трунев А.П. Проблема Била и квантовая статистика. // Chaos and Correlation, June 10, 2013, http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR_1_06_2013.pdf
4. Трунев А.П. Моделирование метрики адронов на основе уравнений Янга-Миллса// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №10(084). С. 874 – 887. – IDA [article ID]: 0841210068. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf
5. Alexander Trunev. Preons dynamics and structure of quarks and leptons// Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal

KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2013. - № 04 (088). - Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2013/04/pdf/64.pdf

6. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Statistical Physics. Vol. 5 (3rd ed.). Butterworth-Heinemann. 1980.
7. Krivonosov LN, Luk'yanov VA. The Full Decision of Young-Mills Equations for the Central-Symmetric Metrics / / Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 2011, 4 (3), 350-362 (in Russian).
8. A. P. Trunev. The structure of atomic nuclei in Kaluza-Klein theory // Poly-thematic electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Journal KubGAU) [electronic resource]. - Krasnodar KubGAU, 2012. – №02(76). P. 862 – 881. – Mode of access: http://ej.kubagro.ru/2012/02/pdf/70.pdf
9. Robert J. Finkelstein. The Preon Sector of the SLq(2) (Knot) Model//arXiv:1301.6440v1 [hep-th] 28 Jan 2013
10. Jean-Jacques Dugne, Sverker Fredriksson, Johan Hansson, Enrico Predazzi. Preon Trinity - a new model of leptons and quarks// arXiv:hep-ph/9909569v3
11. Nick Bostrom. Are We Living in a Computer Simulation? // The Philosophical Quarterly, Vol. 53, 211, pp. 243-255, April 2003.
12. S.R. Beane, Zohreh Davoudi, and Martin J. Savage. Constraints on the Universe as a Numerical Simulation// arXiv: 1210.1847v1, 4 Oct., 2012.