



Chaos and Correlation
International Journal, January 6, 2014

**КОСМОЛОГИЯ НЕОДНОРОДНОЙ
ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВСЕЛЕННОЙ И
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕАЛЬНОСТИ**

**COSMOLOGY OF INHOMOGENEOUS
ROTATING UNIVERSE AND REALITY SHOW**

Трунев Александр Петрович
к.ф.-м.н., Ph.D.
*Директор, A&E Trounev IT Consulting, Торонто,
Канада*

Alexander Trunev
Cand.Phys.-Math.Sci., Ph.D.
*Director, A&E Trounev IT Consulting, Toronto,
Canada*

На основе решений уравнений Эйнштейна предложены универсальные метрики, описывающие свойства неоднородной вращающейся Вселенной.
Ключевые слова: геометрия пространства-времени, общая теория относительности, космология.

On the basis of solutions of the Einstein equation proposed universal metric describing the properties of an inhomogeneous rotating universe.
Keywords: space-time geometry, general relativity, cosmology.

Введение

Общая теория относительности /1-3/ широко применяется в современной космологии, особенно, в связи с открытием ускоренного расширения Вселенной /4/.

Уравнения гравитационного поля Эйнштейна имеют вид /1/:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = g_{\mu\nu} \Lambda + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1)$$

$R_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}$ - тензор Риччи, метрический тензор и тензор энергии-импульса; Λ, G, c - космологическая постоянная Эйнштейна, гравитационная постоянная и скорость света соответственно.

Заметим, что тензор энергии-импульса не может быть непосредственно использован в построении геометрии в силу неопределенности самого понятия материи, которую следует определить, например, в рамках теории геометродинамики /5-8/.

В общем случае имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
 R_{ik} &= R_{ijk}^j, \quad R = g^{ik} R_{ik}, \\
 R_{\beta\gamma\delta}^\alpha &= \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\beta\delta}^\mu \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \Gamma_{\mu\delta}^\alpha, \\
 \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{sj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right)
 \end{aligned} \tag{2}$$

$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ - тензор Римана, Γ_{kl}^i – символы Кристоффеля второго рода.

Как известно, Эйнштейн предложил в 1912-1955 гг. несколько альтернативных теорий гравитации, среди которых теория (1) получила всеобщее признание. Множество споров вызывала космологическая постоянная, введенная Эйнштейном в 1917 г в работе /1/. Однако происхождение этого эффекта относится к одной из самых больших загадок современной физики /9-13/.

Действительно, это слагаемое могло бы возникнуть как следствие квантовых флуктуаций, но соответствующие оценки показывают, что существует огромное различие, составляющее 120 порядков между экспериментальной величиной Λ и предсказанием квантовой теории гравитации. Это различие можно несколько сократить, используя различные соображения /9/, но нельзя устранить.

Отмеченное огромное различие между фактами и теорией означает, что между геометрией микромира и геометрией в масштабе всей Вселенной нет никакой связи. Но тогда уравнение Эйнштейна (1) теряет свой смысл, так как материя состоит из атомов и элементарных частиц. Чтобы разрешить это противоречие, был формулирован **Принцип максимальной определенности**: *Метрика пространства-времени зависит только от таких фундаментальных констант, которые определяются с максимальной возможной точностью.*

Отметим, что в современной физике к таким константам относятся скорость света, постоянная Планка, постоянная тонкой структуры, масса электрона, масса протона и некоторые другие величины. Тензор энергии импульса материи имеет сравнительно низкую точность определения, а с учетом большого содержания темной материи в наблюдаемой Вселенной, вообще не определен, поэтому не может входить в число параметров, от которых зависит метрика пространства-времени.

Чтобы сохранить основную идею определения метрики в теории гравитации Эйнштейна и при этом удовлетворить принципу максимальной определенности, мы предположим, что уравнение Эйнштейна (1) распадается на два независимых уравнения /14-16/:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \lambda g_{\mu\nu} &= 0 \\ g_{\mu\nu} (\Lambda + \lambda) + \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь λ – некоторая функция, зависящая от фундаментальных констант доступных измерению с максимально возможной точностью. Отметим, что первым уравнением определяется метрика пространства-времени, а вторым уравнением задается распределение материи, которое соответствует этой метрике.

При таком подходе отпадает необходимость строить гипотезы относительно распределения массы и энергии во Вселенной. Основой всех наблюдаемых феноменов является метрика, которой соответствует распределение массы и энергии, определяемое из второго уравнения (2). Метрика зависит только от фундаментальных констант, а распределение массы и энергии полностью определяется геометрией, что согласуется с механизмом возникновения массы и в стандартной модели, и в квантовой

теории гравитации. Очевидно, что нет необходимости выводить этот механизм из каких-то других физических явлений, так как все эти явления уже отражены в метрике пространства-времени, которое является не только ареной всех событий, но и их причиной и следствием /5-8/. Материя в модели (2) является пассивной компонентой, наличие которой не является обязательным. Это можно сравнить с течением подкрашенной воды, в котором краска является пассивной компонентой, позволяющей осуществлять визуализацию движения, но не влияющей на движение /14-17/.

В работах /15-16/ на основе аксиально-симметрических решений модели (3) была построена метрика местного суперкластера галактик. В работе /17/ рассмотрена модель неоднородной вращающейся Вселенной. Для нахождения решений первого уравнения (3), согласующегося со стандартной космологической моделью без использования гипотез о распределении материи и энергии, были выбраны метрики с точным значением $\lambda = -1$.

В настоящей работе построены метрики, которые могут быть использованы для представления реальности, содержащей области эллиптичности и области гиперболичности уравнений поля.

Метрика неоднородной вращающейся Вселенной

Для моделирования вращения Вселенной мы используем известные результаты /18-21/ и метрику /22/, модифицированную с учетом разделения угловых переменных и расстояния до объектов в виде

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= dt^2 + 2b(t,r)dtdr - a^2(t,r)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= 1, g_{11} = -a^2(t,r), g_{01} = g_{10} = b(t,r) \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2\vartheta
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Здесь $a = a(t,r), b = b(t,r)$ - функции, удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна. Такой выбор метрики обусловлен, прежде всего, тем, что в

современной астрофизике нет никакого достоверного метода определения расстояний в масштабе наблюдаемой Вселенной. Сферическая система координат, используемая для составления астрономических каталогов, определена на единичной сфере, а расстояние до объектов является некоторым функционалом, зависящим от используемых физических моделей /23-24/, а не от координат.

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (4) имеют вид

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= 1 \\
 G_{01} &= G_{10} = b(t, r) \\
 G_{11} &= -a^2(t, r) \\
 G_{22} \sin^2 \vartheta &= G_{33} \\
 G_{22} &= \frac{bb_t(b_r + aa_t) - b^2(a_t^2 + b_{rr} + aa_{tt}) + aa_r b_t - a^2(b_{rr} + aa_{tt})}{(a^2 + b^2)^2}
 \end{aligned} \tag{5}$$

Полагая $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = -\lambda g_{\alpha\beta}$, находим уравнения поля. Из первых трех выражений (5) и из вида метрического тензора следует, что в метрике (4) параметр $\lambda = -1$. Следовательно, скалярная кривизна исследуемых пространств Эйнштейна является отрицательной, $R = -4$.

Из двух функций $a = a(t, r)$, $b = b(t, r)$ только одна может быть определена из уравнений поля, тогда как другая должна быть задана. Положим $b = const$, тогда метрика (4) может быть обобщена на случаи, соответствующие уравнениям поля гиперболического, эллиптического или смешанного типа соответственно.

Уравнения поля гиперболического типа

Рассмотрим метрику вида

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \psi(t, r)dt^2 + 2bdt dr - \psi(t, r)dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta d\phi^2 \\
g_{00} &= \psi(t, r), g_{11} = -\psi(t, r), g_{01} = g_{10} = b \\
g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2\vartheta
\end{aligned} \tag{6}$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (6) имеют вид

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \psi(t, r), G_{01} = G_{10} = b, \\
G_{11} &= -\psi(t, r), G_{22} \sin^2\vartheta = G_{33}, \\
G_{22} &= \frac{\psi(\psi_t^2 - \psi_r^2) - (b^2 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{rr})}{2(\psi^2 + b^2)^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

Полагая $G_{22} = -1$, находим уравнение гиперболического типа для определения метрики

$$\frac{\psi(\psi_t^2 - \psi_r^2) - (b^2 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{rr})}{2(\psi^2 + b^2)^2} = -1 \tag{8}$$

В рамках модели (8) можно решить задачу о распаде скопления галактик. Зададим метрику в начальном состоянии в виде нормального распределения по радиальной координате. Тогда в силу уравнения (8) со временем кластер распадается на отдельные кластеры, образующие гало, которые соответствуют гребням возникающих нелинейных волн – рис. 1. Этот распад зависит от величины параметра b . При малой величине $b < 0.2$ скопление распадается на три и более кластера, а при большой величине $b \approx 1$ скопление сохраняет свою первоначальную форму.

Следовательно, вращение стабилизирует Вселенную, сохраняя ее целостность, тогда как в отсутствии вращения Вселенная со временем распадается на отдельные фрагменты, что обусловлено скалярными волнами. Заметим, что такого типа скалярные волны могут быть ответственными за образование отдельных галактик и даже элементарных частиц, например,

скалярных бозонов. Действительно, уравнение (8) не содержит никаких масштабных параметров, кроме времени и координаты, масштабы которых могут быть выбраны произвольно.

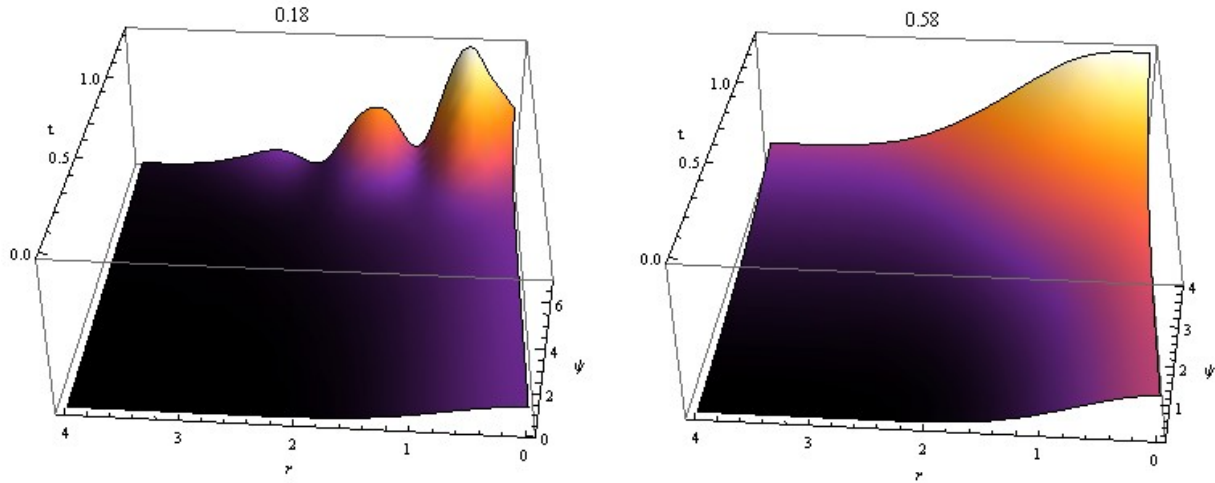


Рис. 1. Распад скопления на ряд кластеров в модели (8): над рисунками указана величина параметра b .

Уравнения поля эллиптического типа

Рассмотрим метрику вида

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \psi(t, r) dt^2 + 2b dt dr - dr^2 / \psi(t, r) - d\vartheta^2 - \sin^2 \vartheta d\phi^2 \\
 g_{00} &= \psi(t, r), \quad g_{11} = -1/\psi(t, r), \quad g_{01} = g_{10} = b \\
 g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
 g_{22} &= -1, \quad g_{33} = -\sin^2 \vartheta
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

Вычисляя отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (9), находим

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \psi(t, r), \quad G_{01} = G_{10} = b, \\
 G_{11} &= -1/\psi(t, r), \quad G_{22} \sin^2 \vartheta = G_{33}, \\
 G_{22} &= \frac{-2\psi_t^2 + \psi \psi_{tt} + \psi^3 \psi_{rr}}{2(1 + b^2)\psi^3}
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Используя уравнение $G_{22} = -1$, имеем

$$\psi \psi_{tt} + \psi^3 \psi_{rr} = -2(1 + b^2)\psi^3 + 2\psi_t^2 \quad (11)$$

В случае статической метрики положим $\psi_t = \psi_{tt} = 0$, тогда, интегрируя уравнение (11), находим, что

$$\psi = 1 + kr - (1 + b^2)r^2 \quad (12)$$

Как известно, квадратичный потенциал (12) приводит к разбеганию галактик по закону Хаббла /15-16/. Отметим, что уравнение (12) является уравнением эллиптического типа, что означает зависимость решения от граничных условий не только в прошлом, но и в будущем. Вопрос о граничных условиях для уравнения (1) обсуждался Эйнштейном /1/, который пришел к выводу, что Вселенная представляет собой замкнутый сферический мир. Другая точка зрения содержится в монографии /25/, автор которой предположил, что имеется только три типа полей тяготения, и что для каждого типа существуют свои граничные условия.

В этой связи заметим, что потенциал (12) очевидным образом связан с решением Шварцшильда /26/, описывающим гравитационное поле точечной массы, и решением Коттлера /27/, являющимся обобщением решения Шварцшильда. Решение Шварцшильда обычно используется для доказательства гравитационного коллапса сферического тела /28/, хотя против возможности неограниченного сжатия вещества возражали и Шварцшильд, и Эйнштейн /29/. Тем не менее, коллапс и черные дыры составляют значительную часть современных исследований в области астрофизики. Поэтому уравнение (11) можно рассматривать как модель явления коллапса сферического вращающегося тела.

Обычно предполагается, что черные дыры представляют собой статические образования, взаимодействующие с внешним миром посредством гравитационного поля. Однако уравнение (11) показывает, что черная дыра, если она существует, должна быть замкнута не только в пространстве, но и во времени. Следовательно, дыра, если она возникла в некоторый момент времени в результате коллапса, должна иметь конечную протяженность во времени, так как уравнение (11) имеет эллиптический тип. Действительно, рассмотрим решение уравнения (11), зависящее только от времени. Положим $\psi_{rr} = 0$, тогда уравнение (11) приводится к виду

$$\psi \psi_{tt} = -2(1 + b^2)\psi^3 + 2\psi_t^2 \quad (13)$$

Уравнение (13) можно проинтегрировать в общем случае, в результате находим

$$\psi(t) = \frac{4(1 + b^2)}{4(1 + b^2)^2(t - t_0)^2 + C_0} \quad (14)$$

Полученное решение (14) описывает объект, локализованный вокруг момента времени $t = t_0$, что и требовалось доказать. В общем случае решение задачи о метрике объекта, локализованного в пространстве и во времени зависит от граничных условий. Так, например, распад скопления в случае метрики (9) приводит к образованию гало вокруг центрального ядра, но все скопление существует конечное время, то есть локализовано во времени.

Уравнения поля смешанного типа

Рассмотрим метрику вида

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \psi(t, r)dt^2 + 2btdr - \frac{1+\psi^2}{\psi}dr^2 - d\vartheta^2 - \sin^2\vartheta d\phi^2 \\
g_{00} &= \psi(t, r), \\
g_{11} &= -\frac{1+\psi^2}{\psi}, \\
g_{01} &= g_{10} = b \\
g_{02} &= g_{13} = g_{23} = g_{03} = 0, \\
g_{22} &= -1, g_{33} = -\sin^2\vartheta
\end{aligned} \tag{15}$$

Отличные от нуля компоненты тензора Эйнштейна в метрике (15) равны

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \psi(t, r), G_{01} = G_{10} = b, \\
G_{11} &= -\frac{1+\psi^2}{\psi}, \\
G_{22} \sin^2\vartheta &= G_{33}, \\
G_{22} &= \frac{-2(1+b^2)\psi_t^2 - 3\psi^2\psi_t^2 + \psi^4(\psi_t^2 - \psi_r^2) + \psi^5(\psi_{rr} - \psi_{tt}) + (1+b^2)\psi\psi_{tt} + \psi^3((1+b^2)\psi_{rr} - b^2\psi_{tt})}{2(1+b^2+\psi^2)^2\psi^3}
\end{aligned}$$

Полагая $G_{22} = -1$, находим уравнение поля

$$\begin{aligned}
&-\psi(\psi^4 + \psi^2b^2 - b^2 - 1)\psi_{tt} + \psi^3(\psi^2 + b^2 + 1)\psi_{rr} = \\
&-2(1+b^2+\psi^2)^2\psi^3 + (2+2b^2+3\psi^2-\psi^4)\psi_t^2 + \psi^4\psi_r^2
\end{aligned} \tag{16}$$

Отметим, что уравнение (16) изменяет свой тип в зависимости от амплитуды поля ψ :

- 1) в области $0 < \psi < 1$ уравнение (16) имеет эллиптический тип;
- 2) в области $\psi > 1$ уравнение (16) имеет гиперболический тип.

При этом тип метрики не меняется, как это видно из выражения (15).

При решении задачи о распаде скопления в рамках модели (16), типа приведенной на рис. 1 для гиперболического уравнения (8), возникает эффект, препятствующий распространению колебаний в область эллиптичности – рис. 2.

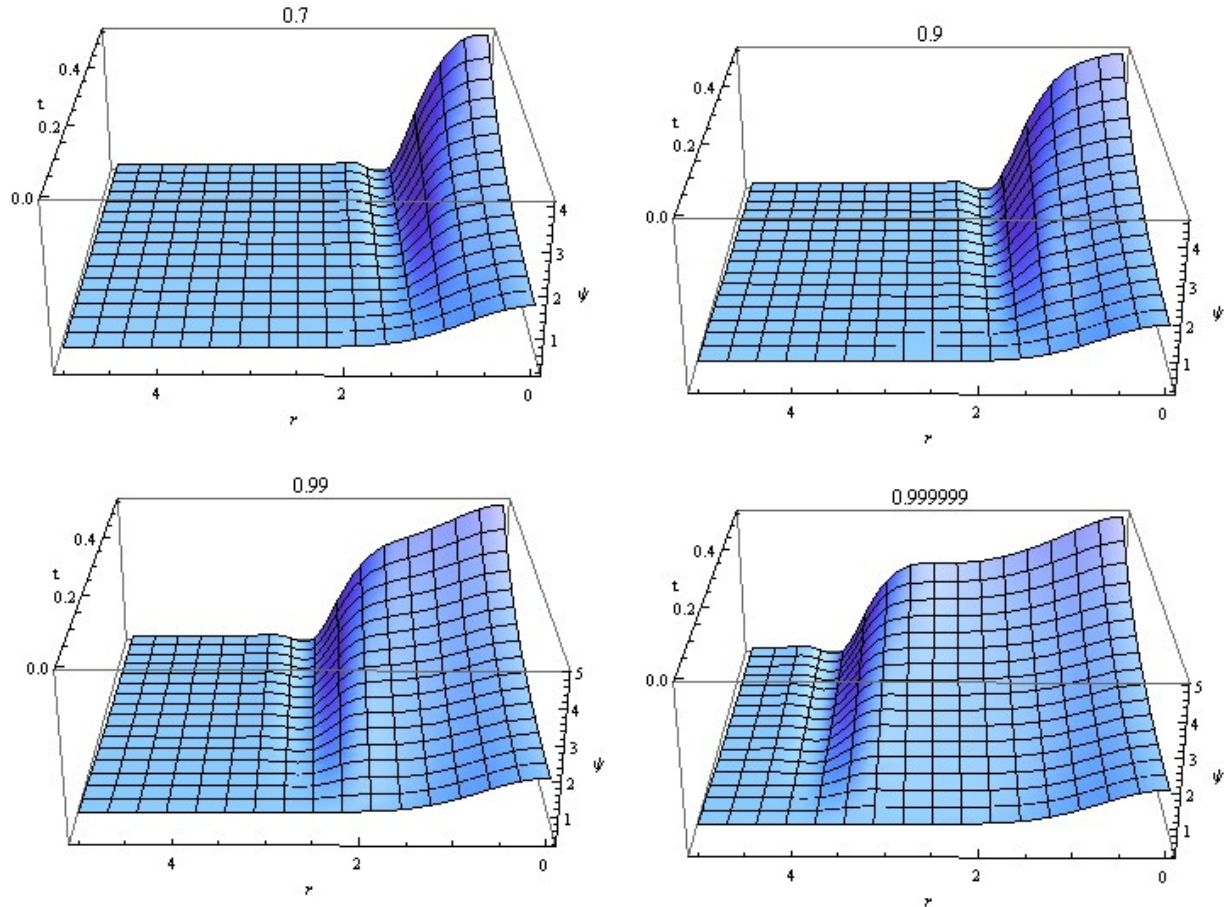


Рис. 2. Распространение возмущений конечной амплитуды в модели (16): возмущения не проникают в область эллиптичности, размер которой определяется величиной константы $0 < \psi < 1$ (указана над каждым рисунком)

Задавая исходное распределение поля в виде константы плюс нормальное распределение, находим, что волновые возмущения не проникают в область эллиптичности. Возможно, что этот эффект ограничивает распространение скалярных гравитационных волн в Солнечной системе, которая, как мы предполагаем, находится в области эллиптичности гравитационного поля Вселенной.

Другой эффект, который обусловлен свойствами модели (16) – это распад и слияние волн конечной амплитуды – рис. 3. Если в области гиперболичности модели (16) создать в начальный момент возмущение

конечной амплитуды, то со временем эти волны распадаются на две волны, распространяющиеся со скоростью света – рис. 4.

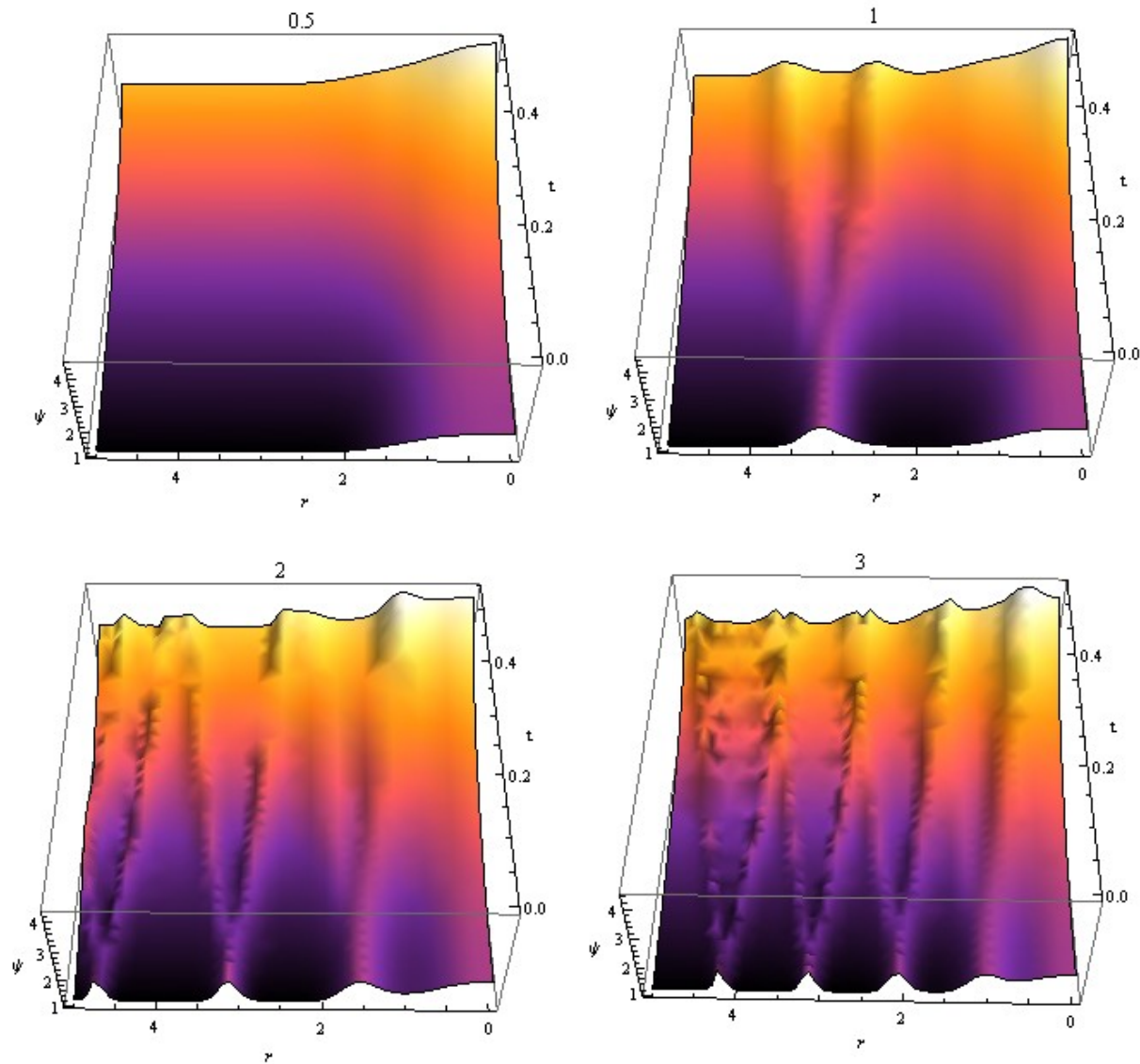


Рис. 3. Распад волн конечной амплитуды в модели (16): над рисунками указано волновое число.

Волны, возникающие при распаде соседних гребней, сливаются через некоторое время, создавая сложную картину волнового поля, типичную для нелинейных систем – рис. 5. Такого типа процессы могут быть ответственны за образование наблюдаемой материи.

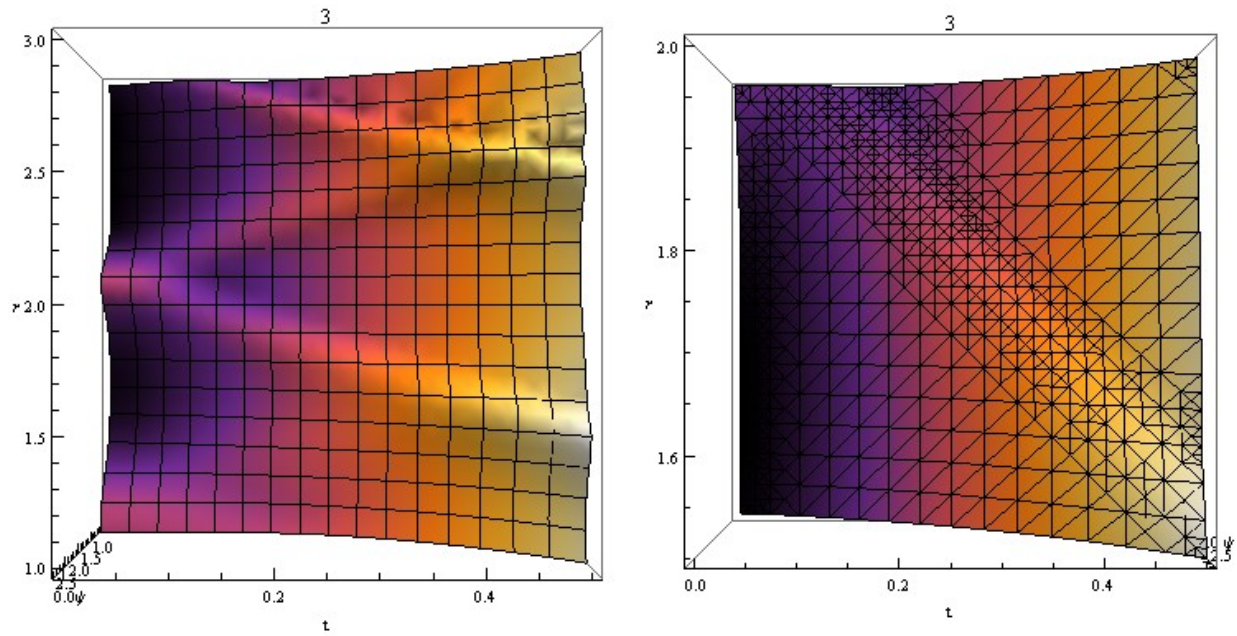


Рис. 4. Определение скорости распространения возмущений при распаде волны: фрагмент нижнего правого рисунка 3 увеличен и представлен в масштабе 1:1. Диагональ на правом рисунке показывает, что скорость распространения волн равна 1, что соответствует скорости света.

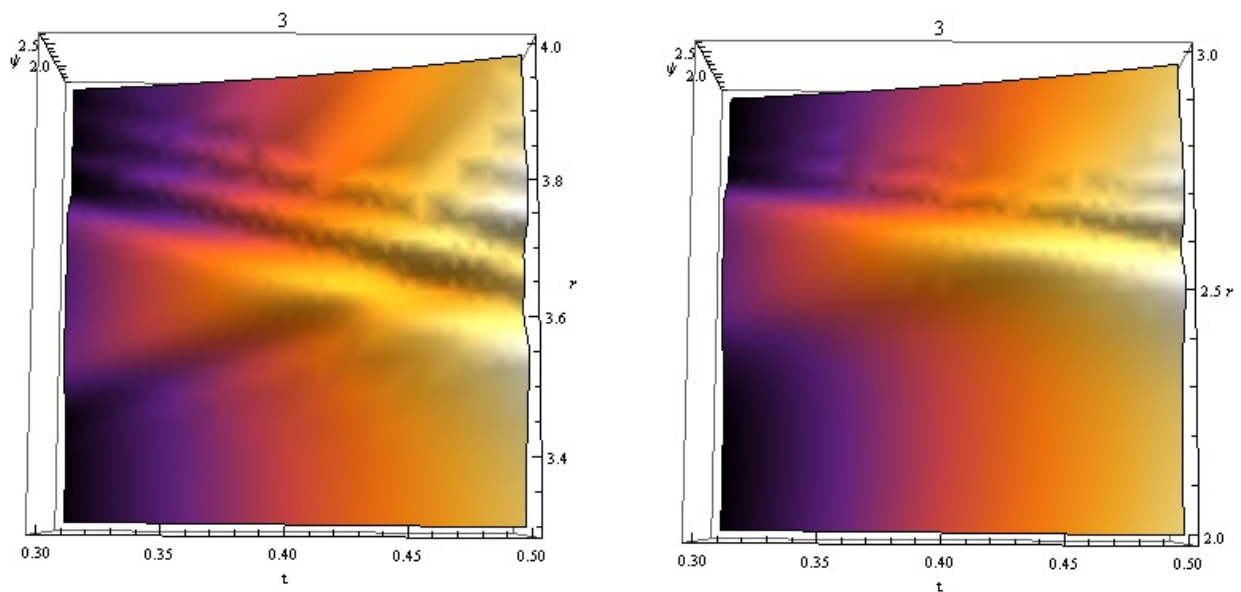


Рис. 5. Взаимодействие нелинейных волн в модели (16) с образованием вторичного волнового поля.

В области эллиптичности модели (16) система кластера и гало локализована не только в пространстве, но и во времени – рис. 6. Эта модель демонстрирует главный признак нашего мира возникающих и исчезающих феноменов, что любой объект имеет конечное время жизни.

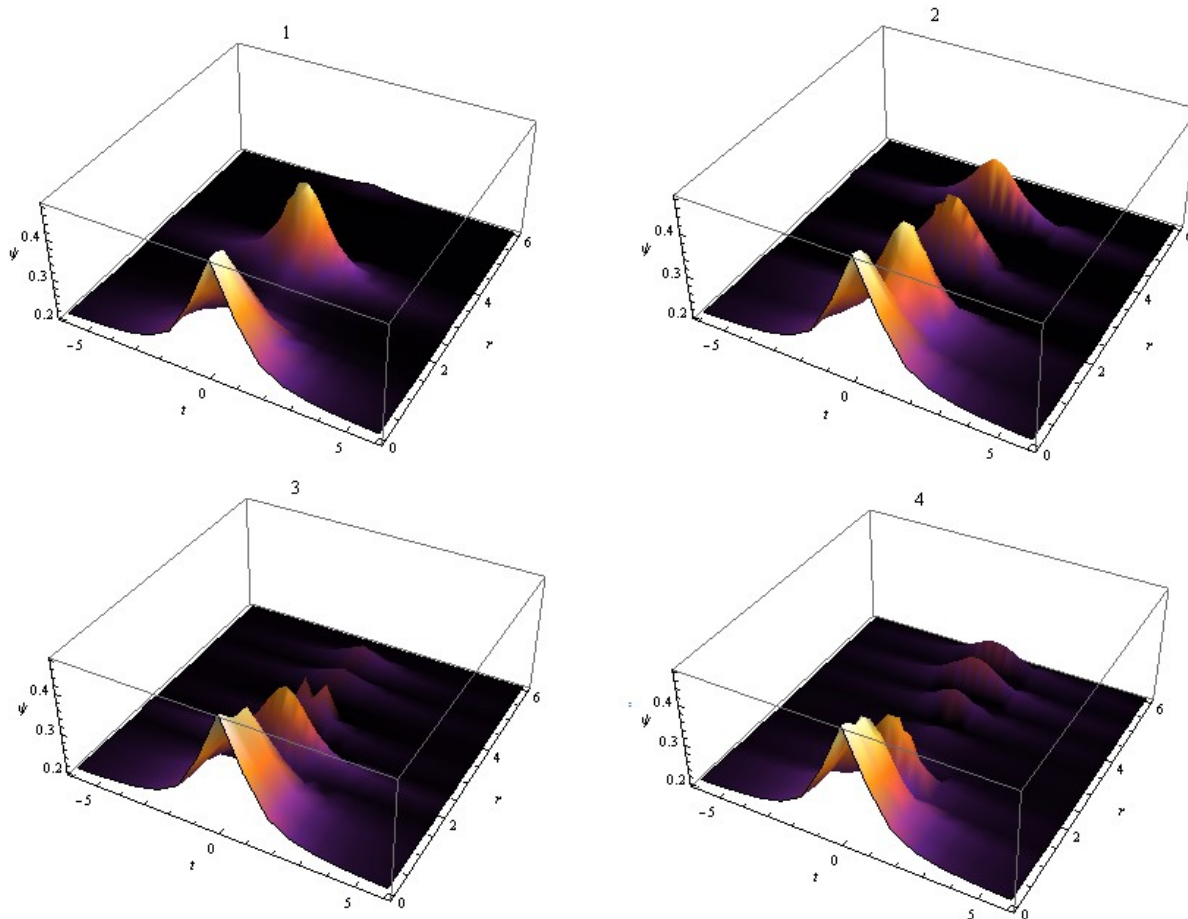


Рис. 6. Кластер и гало, локализованные в пространстве и во времени.

Следовательно, в общей теории относительности существуют такие гравитационные поля, которые определены во всем пространстве-времени, но в одной области эти поля определяются на основе эллиптических уравнений, а в другой области - на основе гиперболических уравнений. Как известно, такого рода задачи возникают в аэродинамике при переходе через скорость звука, а также в задачах изгиба упругих оболочек /30/. Отметим, что в

уравнении (16) переход связан не со скоростью света, а с критической амплитудой потенциала гравитации $\psi = 1$.

Поскольку в нашей области Вселенной галактики и кластеры удаляются друг от друга по закону Хаббла, можно предположить, что вся эта область пространства-времени является областью эллиптичности уравнений поля. Но тогда совокупность событий в нашей части Вселенной должна быть предопределена на все время ее существования. Кроме того, все события должны быть связаны между собой не только причинно-следственными связями, но и более общими функциональными связями, типа квантовой механики.

Наконец, заметим, что исследованные метрики вращающейся неоднородной Вселенной были построены на основе модели (3), в которой материя не влияет на геометрию пространства-времени. Однако эти результаты остаются справедливыми и в исходной модели Эйнштейна (1), в которой тензор энергии-импульса материи совпадает с метрическим тензором с точностью до постоянного множителя.

Библиографический список

1. Einstein A. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., 1917, 1, 142—152; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 601.
2. Einstein A. Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie. Ann. Phys., 1918, 55, 241—244; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. – М., Наука, 1965, с. 613.
3. Einstein A. Zum kosmologischen Problem der allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 1931, 235—237; Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, с. 349.

4. Adam G. Riess et al. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and Cosmological Constant// arXiv: astro-ph/ 9805201, 15 May, 1998.
5. Einstein A., Infeld L., Hoffmann B. Gravitational Equations and Problems of Motion // Ann. Math., 39,65-100, 1938.
6. C. Misner and J. Wheeler. Classical Physics as Geometry // Ann. of Phys., 2, No. 6, 525—603, 1957.
7. Wheeler, J. A. On the Nature of Quantum Geometrodynamics// Annals of Physics 2, No, 6 (Dec 1957): 604 – 614.
8. John A Wheeler. Neutrinos, Gravitation, and Geometry/ In Rendiconti della Scuola internazionale di fisica "Enrico Fermi." Corso XI, by L. A.Radicati. Bologna: Zanichelli, 1960, 67 – 196.
9. Zeldovich, Y. B. The Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles// Soviet Physics Uspekhi vol. 11, 381-393, 1968.
10. Steven Weinberg. The Cosmological Constant Problems// arXiv:astro-ph/0005265v1 12 May 2000.
11. F. J. Amaral Vieira. Conceptual Problems in Cosmology//arXiv:1110.5634v1 [physics.hist-ph] 25 Oct 2011
12. S.E. Rugh and H. Zinkernagel. The Quantum Vacuum and the Cosmological Constant Problem//Studies in History and Philosophy of Modern Physics, 33(4), 2002.
13. C.P. Burgess. The Cosmological Constant Problem: Why it's hard to get Dark Energy from Micro-physics//arXiv:1309.4133v1 [hep-th] 16 Sep 2013
14. Трунев А.П. Метрика виртуальных миров // Научный журнал КубГАУ, 2013. – №09(093). С. 1569 – 1589. – IDA [article ID]: 0931309109. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/09/pdf/109.pdf>
15. Трунев А.П. Метрика местного суперкластера галактик и общая теория относительности // Научный журнал КубГАУ, 2013. – №10(094). С. 893 – 916. – IDA [article ID]: 0941310061. – Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2013/10/pdf/61.pdf>
16. Alexander P. Trunev. General relativity and the metric of the local group of superclusters// Chaos and Correlation, December 27, 2013.
17. Alexander P. Trunev. COSMOLOGY OF INHOMOGENEOUS ROTATING UNIVERSE // Chaos and Correlation, January 3, 2014.

18. Delsarte J. Sur les ds2 d'Einstein a symetrie axiale. - Paris, 1934; Delsarte J. Sur les ds2 binaires et le probleme d'Einstein, Journ Math. Pures Appl. 13, 19, 1934.
19. Gödel K. An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equations of gravitation// Rev. Mod. Phys. 21,447, 1949.
20. P. Szekeres. A class of inhomogeneous cosmological models//Comm. Math. Phys. Volume 41, Number 1 (1975), 55-64.
21. Anthony Walters & Charles Hellaby. Constructing Realistic Szekeres Models from Initial and Final Data// arXiv:1211.2110v1 [gr-qc] 9 Nov 2012.
22. G. Scharf. Inhomogeneous cosmology in the cosmic rest frame// arXiv:1312.2695v2 [astro-ph.CO] 13 Dec 2013.
23. Distances//arXiv: 1309.5382v1 [astro-ph.CO] 20 Sep 2013.
24. Steven Weinberg. Gravitation and Cosmology. – John Wiley & Sons, 1972.
25. A.Z. Petrov. New methods in general relativity. - Moscow: Nauka, 1966.
26. K. Schwarzschild. Über das Gravitations-feld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie// Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys.-Math. Klasse, 189–196 (1916); On the Gravitational Field of a Mass Point according to Einstein's Theory//arXiv:physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 May 1999.
27. Kottler F. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie// Ann. Phys. 4, 56, 1918.
28. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1971). The Classical Theory of Fields. Vol. 2 (3rd ed.). Pergamon Press. ISBN 978-0-08-016019-1.
29. A. Einstein. On a Stationary System with Spherical Symmetry Consisting of many Gravitating Masses// Ann. Math. 40, 922-936, 1939.
30. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970.