Chaos and Correlation
International Journal, February 17, 2018

ТУРБУЛЕНТНОЕ МГД ТЕЧЕНИЕ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПОЛОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. П. Трунев

В работе рассматриваются вопросы построения уравнений магнитной гидродинамики, описывающих турбулентные течения проводящей жидкости в электромагнитном поле при больших значениях магнитного числа Тейлора, магнитного числа Рейнольдса и числа Рейнольдса вязкого потока. Для численного решения проблемы используются программы, разработанные автором на основе Wolfram Mathematica 11. Предложены методы регуляризации уравнений магнитной гидродинамики, аналогичные природным механизмам перемешивания. Указана аналогия гидродинамических и электромагнитных полей в случае вязких течений проводящей жидкости. Модификация уравнений магнитной гидродинамики путем введение турбулентной вязкости позволяет осуществить регуляризацию системы для решения задач с быстро изменяющимися динамическими параметрами, например, в случае течений проводящей жидкости в переменном электромагнитном поле. Сформулирована система уравнений относительно скорости течения и векторного потенциала. Построена численная модель турбулентного МГД течения в прямоугольной полости в переменном электромагнитном поле. В численных расчетах установлено, что под воздействием переменного электромагнитного поля в проводящей жидкости возникают объемные силы, вызывающие нестационарное вихревое течение, что согласуется с экспериментальными данными. Определена зависимость углового момента от магнитного числа Тейлора в турбулентной области течения.

Ключевые слова: МГД-ТЕЧЕНИЕ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ.

TURBULENT MHD FLOW IN A RECTANGULAR CAVITY IN ELECTROMAGNETIC FIELD

Alexander Trunev

The paper deals with the construction of the equations of magnetohydrodynamics describing the turbulent flows of a conducting liquid in an electromagnetic field for large values of the Taylor magnetic number, the magnetic Reynolds number, and the Reynolds number of the viscous flow. Numerical solution of the problem uses programs developed by the author on the basis of Wolfram Mathematica 11. Methods of regularization of the equations of magnetohydrodynamics similar to natural mixing mechanisms are proposed. The analogy of hydrodynamic and electromagnetic fields in the case of viscous flow of a conducting liquid is indicated. The modification of the equations of magnetohydrodynamics by introducing turbulent viscosity makes it possible to regularize the system for solving problems with rapidly varying dynamic parameters, for example, in the case of flows of a conducting liquid and plasma in an alternating electromagnetic field. A system of equations is formulated for the flow velocity and the vector potential. A numerical model of a turbulent MHD flow in a rectangular cavity in an alternating electromagnetic field is constructed. In numerical calculations, it is established that under the action of a rotating electromagnetic field, a volume force arises in a conducting liquid causing a non-stationary vortex flow, which agrees with the experimental data. The dependence of the angular momentum on the magnetic Taylor number in the turbulent flow region is determined.

Keywords: MHD FLOW, NUMERICAL SIMULATION, TURBULENCE, ELECTROMAGNETIC FIELD.

Введение

Развитие методов моделирования природных процессов на основе систем искусственного интеллекта и машинного обучения [1-2] открывает новые перспективы в исследовании турбулентных течений [3]. Задачи о течениях проводящей жидкости в переменном электромагнитном поле встречаются в астрофизике, геофизике и в физике плазмы. МГД течения в прямоугольной полости исследовались в работах [4-6] и других. В работе [6] развита численная модель турбулентного МГД течения в полости в форме прямоугольника или прямоугольного параллелепипеда во вращающемся магнитном поле. При моделировании объемной силы электромагнитного происхождения использовалось стандартное предположение [4-5] о малости индуцированных магнитных полей в сравнении с внешним полем, что справедливо при малой величине магнитного числа Рейнольдса.

Экспериментально было обнаружено, что в случае течения в прямоугольной полости критическое значение магнитного числа Тейлора составляет $Ta_c = 1.3 \times 10^5$ [5]. При увеличении магнитного числа Тейлора, в области $Ta_c \geq 2.6 \times 10^5$ наблюдаются крупномасштабные нестационарные явления, которые обусловлены турбулентностью. В связи с большим прикладным значением турбулентных МГД течений проводящей жидкости были развиты численные модели [4-6].

Отметим, что в численных моделях вихревого МГД течения во вращающемся магнитном поле [4-5] используется нестационарное уравнение Навье-Стокса, в котором сила, обусловленная действием магнитного поля, усредняется по времени в соответствии с гипотезой [7]. Кроме того, используется калибровка для векторного потенциала $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, но при этом считается, что электростатический потенциал вносит свой вклад в процесс генерации замкнутых токов в проводящей жидкости. Такой подход представляется несколько противоречивым, поэтому мы сформулировали нестационарную модель, основанную на методе регуляризации уравнения Навье-Стокса для турбулентных течений [6, 8-9].

В настоящей работе исследован случай турбулентных МГД течений с большой величиной магнитного числа Рейнольдса и Тейлора. Для численного решения проблемы используются программы, разработанные автором на основе Wolfram Mathematica 11. Предложены методы регуляризации уравнений магнитной гидродинамики, аналогичные природным механизмам перемешивания. Указана аналогия гидродинамических и электромагнитных полей в случае вязких течений проводящей жидкости. Установлены общие закономерности вихревого течения в прямоугольной полости в переменном электромагнитном поле.

Квазистационарное электромагнитное поле в полости

Рассмотрим контейнер прямоугольной формы, наполненный электропроводной жидкостью с плотностью ρ_0 и проводимостью σ, помещенный во внешнее электромагнитное поле, изменяющееся с угловой частотой ω. Будем предполагать, что в декартовой системе координат поле вращается вокруг оси OY, нормальной к двум сторонам контейнера. Для описания электромагнитного поля в полости и в стенках контейнера следует в уравнениях динамики электромагнитного поля учесть токи, наведенные в проводящей жидкости и в стенках.

Необходимо различать случаи, когда стенки контейнера являются изоляторами, проводниками или некоторой их комбинацией. В настоящей работе мы рассмотрим случай непроводящих стенок, что соответствует условиям, при которых были получены данные [4-6]. Считая, что в объеме жидкости выполняется закон Ома, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, находим систему уравнений, описывающих вектор индукции магнитного поля $\mathbf{B}$, векторный потенциал $\mathbf{A}$ и электрическое поле $\mathbf{E}$ [10]

$$\begin{aligned}
&\nabla.\mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mathbf{B}_t \\
&\mathbf{E} = -\mathbf{A}_t - \nabla\varphi, \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \\
&\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\,\mathbf{j} = \mu\sigma(\mathbf{A}_t + \nabla\varphi - \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \\
&c^2 \nabla.\mathbf{A} + \varphi_t = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Первые два уравнения (1) являются стандартными и автоматически выполняются при выполнении третьего и четвертого уравнений (1).

Определим магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \mu\sigma UL$, где $U, L-$ характерная скорость и масштаб течения соответственно. Тогда, пятое уравнение (1) в безразмерных переменных принимает вид:

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nabla\varphi = \frac{1}{\mathrm{Re}_m} \nabla^2 \mathbf{A} \tag{2}$$

Рассмотрим систему уравнений, описывающую течение несжимаемой жидкости с учетом объемных сил электромагнитного происхождения

$$\begin{gathered}
\nabla.\mathbf{u} = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{\mathbf{f}}{\rho_0}
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь обозначено: $\mathbf{u}=(u,v,w)$ - вектор скорость потока; ν - кинематическая вязкость; P - давление; ρ_0 - плотность среды, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t, \mathbf{r})-$ вектор объемной силы, обусловленной взаимодействием токов и зарядов с электромагнитным полем, $\mathbf{f} = [\mathbf{jB}] + q\mathbf{E}$.

Определим число Рейнольдса $\mathrm{Re} = UL/\nu$, тогда, используя тождество $(\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = \nabla u^2/2 - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$, приведем второе уравнение (3) к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \nabla p = \frac{1}{\mathrm{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathrm{Ta}\,\mathbf{f} \tag{4}$$

Здесь $p = P/\rho_0 U^2 + u^2/2$, Ta – число Тейлора, которое определим ниже. Сравнивая уравнения (2) и (4), находим известную аналогию [10-13], широко используемую в магнитной гидродинамике, согласно которой, поле векторного потенциала аналогично полю скорости, поле скалярного потенциала аналогично полю давления. Отметим, что в цитированных работах [10-13] указанная аналогия распространяется только на невязкие течения и на квазистационарное электромагнитное поле в пределе $\sigma \to \infty$. В настоящей работе мы рассмотрим более общую аналогию и случай конечной величины коэффициента электропроводности.

Модель турбулентного течения

В работах [6, 8-9] мы рассмотрели некоторые вопросы моделирования турбулентных течений. Методы прямого численного моделирования турбулентных течений (DNS) опираются непосредственно на систему уравнений (3). При этом для вычисления профиля скорости часто используется метод Галеркина или метод моментов, а также метод Ритца и другие приближенные методы.

Но даже при наличии приближенного метода решения прямое численное моделирование турбулентности не всегда приводит к желаемому результату, так как система уравнений (3), сформулированная для несжимаемых течений, содержит в себе противоречие. Действительно, при выводе этой системы уравнений предполагается, что плотность среды не меняется, а это, в свою очередь, означает малость числа Маха потока [14]

$$M = U/c_s << 1 \tag{5}$$

Здесь c_s – скорость звука. Однако, на решениях, которые описывают турбулентное течение, условие (5) может нарушаться, что приводит к необходимости учета сжимаемости среды. При этом желательно, чтобы тип системы уравнений (3) не изменился при всех ее модификациях. Рассмотрим следующий подход к учету сжимаемости без изменения типа системы уравнений (3). Запишем уравнение неразрывности для сжимаемой среды в форме

$$\nabla.\boldsymbol{u} = -\rho^{-1}d\rho/dt = -(1/\rho c_s^2)dP/dt \tag{6}$$

Оценка правой части уравнения (6) имеет порядок $M^2\omega_0$, где ω_0 – характерная частота пульсаций давления. При выполнении условия (5) и для умеренных частот правую часть можно устремить к нулю, в результате приходим к первому уравнению (3). Однако для больших частот колебаний параметров потока, характерных для турбулентных режимов, условия (5) может оказаться недостаточно для того, чтобы положить нулю правую часть уравнения (6). Область таких частот определяется неравенством $M^2\omega_0 \geq 1$.

Следовательно, турбулентная среда не может считаться несжимаемой даже при малых числах Маха. Для такой среды необходимо сформулировать такое уравнение состояния, которое отражало бы связь параметров в турбулентном потоке. Рассмотрим функционал

$$\widetilde{P} = \frac{1}{t}\int_0^t P\,d \tag{7}$$

Функционал (7) обладает следующими свойствами

$$\begin{aligned} \widetilde{P} &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t P dt = P \\ \widetilde{P} &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t P dt = \langle P \rangle \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, используя функционал (7) можно описать мгновенное и среднее значение давления в турбулентном потоке. Вычисляя производную по времени от обеих частей выражения (7), находим

$$\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial t} = \frac{P-\widetilde{P}}{t} \tag{9}$$

Положим в правой части (9) $t = 1/\omega_0$, а соответствующий этому времени функционал (7) обозначим P_0. Теперь мы можем сформулировать необходимый критерий регуляризации в виде

$$dP/dt = \alpha\omega_0(P\text{-}P_0) \tag{10}$$

Здесь α, ω_0, P_0 – некоторые параметры, которые могут быть определены для потока в целом. В результате применения (10) к уравнению (6), находим

$$\nabla.\boldsymbol{u} = -(\alpha\omega_0/\rho c_s^2)(P - P_0) = -(P - P_0)/\mu_T \tag{11}$$

Где обозначено $\mu_T = \rho c_s^2/\alpha\omega_0$ - параметр, характеризующий вязкость в турбулентном потоке. Используя уравнение (11), можно переформулировать модель Навье-Стокса (3) в виде, удобном для численного интегрирования. Для этого запишем второе уравнение (3) в форме

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P}{\rho_0} = \nu\nabla^2\mathbf{u} + \mathbf{F} \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{F} = \mathbf{f}/\rho_0$. Вычислим дивергенцию от обеих частей уравнения (12), тогда, используя (11) с постоянными параметрами μ_T, P_0 получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)P = \nu_T\nabla^2 P - \mu_T(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \mu_T\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \tag{13}$$

Здесь по повторяющимся индексам $i,k = 1,2,3$ осуществляется суммирование, $\nu_T = (\mu_T + \mu)/\rho$ - параметр турбулентной диффузии поля давления, $\mu = \rho_0\nu$ - динамическая вязкость. Наконец, мы можем записать систему уравнений (3) в форме системы уравнений параболического типа [6]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)u_i + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x_i} = \nu\nabla^2 u_i + F_i, \quad i = 1,2,3 \\
&\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)P = \nu_T\nabla^2 P - \mu_T(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \mu_T\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{14}$$

Отметим, что параметры турбулентной диффузии и вязкости возникают в системе (14) в силу уравнения (11). Система уравнений (14) может быть использована для моделирования неустановившихся турбулентных течений [6, 8-9, 15-17].

Другой вариант преобразованной системы уравнений Навье-Стокса может быть получен путем прямой подстановки выражения давления (11) в уравнение (12), имеем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla\big(\mu_T(\nabla.\mathbf{u})\big) + \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} \tag{15}$$

Здесь параметры P_0, μ_T следует считать заданными функциями координат и времени. Отметим, что в модели (15) турбулентность проявляется через механизм второй или объемной вязкости, а не через сдвиговые напряжения, как в стандартных моделях турбулентности, включая нашу модель [18].

Уравнение (18) было использовано в работе [6] для моделирования турбулентного течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле. Используя аналогию, вытекающую из сходства уравнений (2) и (4), можно предположить, что в магнитной гидродинамике существует связь дивергенции векторного потенциала и скалярного потенциала типа (11),

$$\nu_m \nabla.\mathbf{A} = \varphi_0 - \varphi \tag{16}$$

Где обозначено ν_m - параметр, характеризующий магнитную вязкость в турбулентном потоке. Используя эту связь, находим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} + \frac{\nabla P_0}{\rho_0} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_0}\nabla\big(\mu_T(\nabla.\mathbf{u})\big) + \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} \\ &\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \nabla\varphi_0 = \frac{1}{\mu\sigma}\nabla^2\mathbf{A} + \nabla\big(\nu_m(\nabla.\mathbf{A})\big) \end{aligned} \tag{17}$$

Далее без ограничения общности положим

$P_0 = 0, \varphi_0 = 0, \mu_T = const, \nu_m = const$.

Система уравнений (17) приводится к безразмерному виду с использованием масштабов длины, скорости, времени и напряженности электрического поля $U = \mu_T / \rho_0 L, T = \rho_0 L^2 / \mu_T$. В результате система уравнений (17) принимает вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\mathbf{u} + \nabla(\nabla.\mathbf{u}) + \mathrm{Ta}\,\mathbf{f} \\ &\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \frac{1}{\mathrm{Re}_m}\nabla^2\mathbf{A} + k\nabla(\nabla.\mathbf{A}) \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь обозначено $\mathrm{Re} = \mu_T / \nu\rho_0, \mathrm{Re}_m = \mu_T\mu\sigma / \rho_0, k = \nu_m\rho_0 / \mu_T, \mathrm{Ta} = \sigma E_0^2 L^2 / \mu_T$. Найдем безразмерное выражение объемной силы в правой части первого уравнения (18) с учетом (16), имеем

$$\mathbf{f} = (-\mathbf{A}_t + k_1\nabla(\nabla.\mathbf{A}) + \mathbf{v}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \tag{19}$$

Отметим, что при $k \to 0$ имеем обычное МГД течение, исследованное в работах [4-6] и других. Ниже изучен случай $k = 1$, что соответствует гипотезе [11-13], а также рассматривается случай $k = 1, k_1 = 0$. Система уравнений (18), (19) решалась численно, в расчетах мы использовали следующие выражения, описывающие векторный потенциал и электрическое поле на границах области:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = A_0(\sin\omega t, 0, \cos\omega t), \\ &\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \omega A_0(-\cos\omega t, 0, \sin\omega t) \end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда находим масштаб электрического поля $E_0 = \omega A_0$. Магнитное поле определяется в процессе решения согласно (1). Заметим, что в работах [4-6] на границах полости задавалось магнитное поле

$$\mathbf{B} = B_0(\cos\omega t, 0, -\sin\omega t) \tag{21}$$

В обсуждаемой задаче с данными (20) магнитное поле имеет одну компоненту $\mathbf{B} = (0, B_y, 0), B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z$, поэтому сравнение с данными натурных и численных экспериментов [4-6] возможно только по параметрам подобия.

Численная модель 2D течения в прямоугольной полости

Рассмотрим двумерное нестационарное течение проводящей жидкости в прямоугольной полости с непроводящими стенками при наличии объемной силы, обусловленной внешним вращающимся электромагнитным полем типа (20). Положим в (18) все функции зависящими от времени и двух координат

$$\mathbf{v} = (u, 0, w), u = u(t, x, z), w = w(t, x, z),$$
$$\mathbf{A} = (A_x, 0, A_z), A_x = A_x(t, x, z), A_z = A_z(t, x, z)$$

Сформулируем задачу о течении в прямоугольной полости $0 \le x \le L_x, 0 \le z \le L_z$ при заданных граничных условиях на стенках полости:

$$\begin{aligned}
&u(0,x,z) = 0,\ w(0,x,z) = 0,\ 0 \le x \le L_x,\ 0 \le z \le L_z;\\
&u(t,0,z) = u(t,L_x,z) = 0,\ w(t,0,z) = w(t,L_x,z) = 0;\\
&u(t,x,0) = u(t,x,L_z) = 0, w(t,x,0) = w(t,x,L_x) = 0.\\
&A_x(0,x,z) = 0,\ A_z(0,x,z) = A_0,\ 0 \le x \le L_x,\ 0 \le z \le L_z;\\
&A_x(t,0,z) = u(t,L_x,z) = \sin\omega t,\ A_z(t,0,z) = w(t,L_x,z) = \cos\omega t;\\
&A_x(t,x,0) = u(t,x,L_z) = \sin\omega t, w(t,x,0) = w(t,x,L_x) = \cos\omega t.
\end{aligned} \tag{22}$$

Для численного решения проблемы используются программы, разработанные автором на основе Wolfram Mathematica 11. На рис. 1-2 представлены данные моделирования течения в прямоугольной полости со сторонами $L_x = L_z = 1$, с числами Рейнольдса и Тейлора $\mathrm{Re} = 10^3, \mathrm{Re}_m = 10^3, \mathrm{Ta} = 1$ и с параметрами $k == k_1 = 0,\ \omega = 2\pi$. Из приведенных данных следует, что в полости формируется нестационарное вихревое течение, качественная картина которого заметно отличается от приведенной в [4-6].

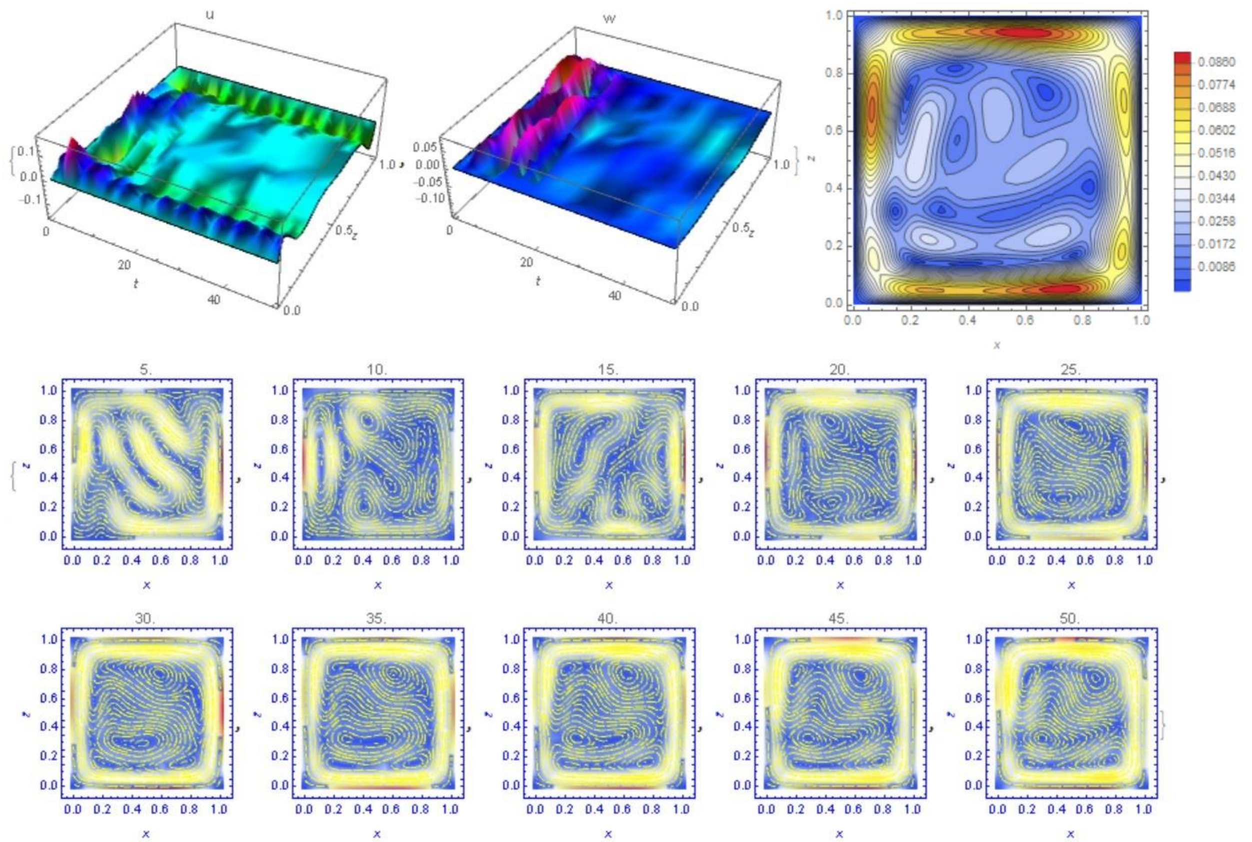

Рис. 1. Компоненты скорости в плоскости (t, x) в сечении $x = L_x / 2$, изолинии модуля скорости в момент времени $t = 50$ и линии тока в различные моменты времени (указаны над рисунками) течения проводящей жидкости в прямоугольной полости во вращающемся электромагнитном поле. Параметры модели: $k = k_1 = 0, \mathrm{Re} = 10^3, \mathrm{Re}_m = 10^3, \mathrm{Ta} = 1, \omega = 2\pi$.

Во-первых, амплитуда скорости течения в модели (18) на порядок меньше, чем в аналогичной модели [6] при равных значениях параметров $\mathrm{Ta} = 1, \mathrm{Re} = 10^3, \omega = 2\pi$. Это объясняется тем, что электромагнитное поле вытесняется из полости при большом значении магнитного числа Рейнольдса – рис. 2.

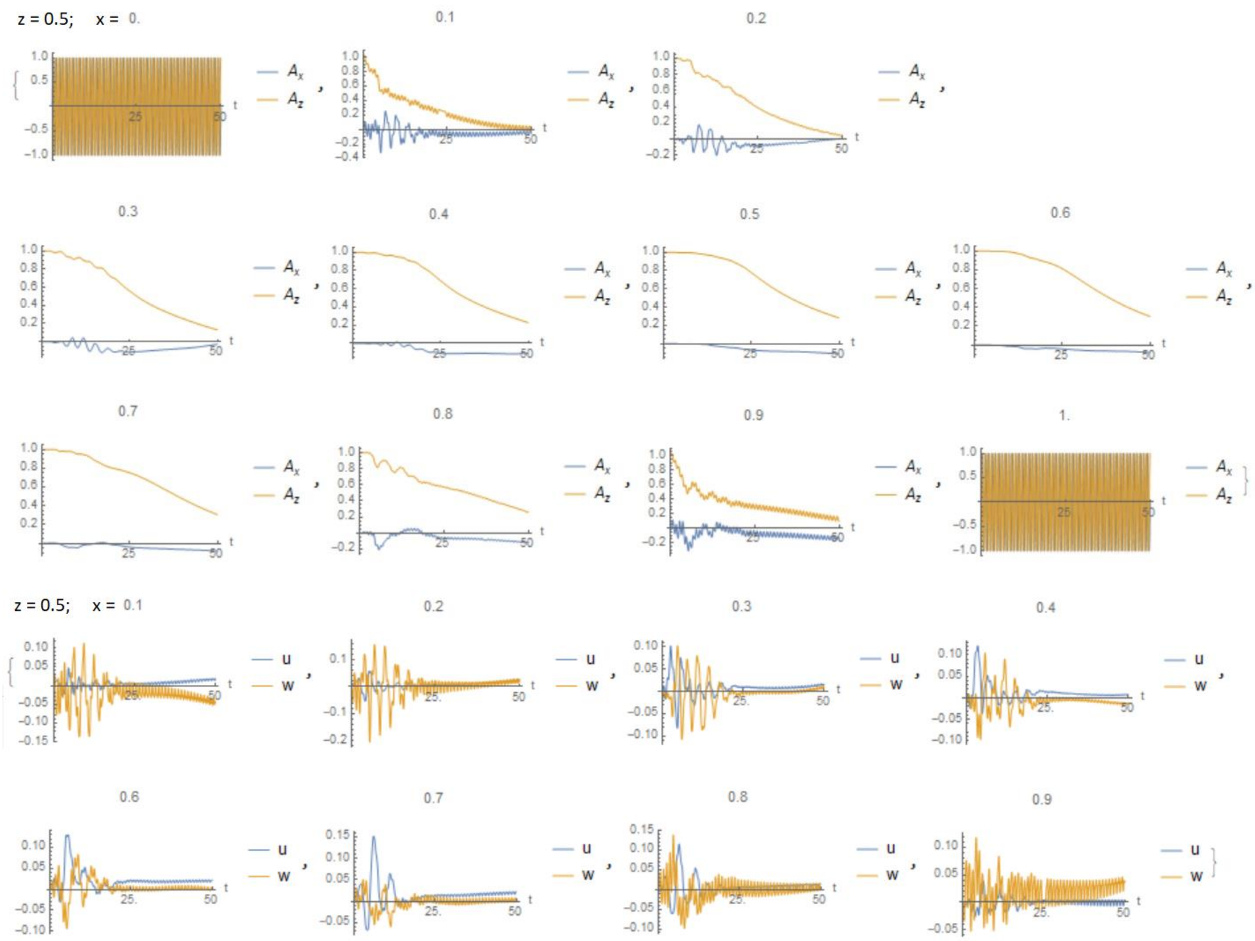

Рис. 2. Осциллограммы составляющих векторного потенциала и скорости течения в сечении $z = 1/2$ в различные точках, указанных над рисунками. Параметры модели: $k = k_1 = 0, \mathrm{Re} = 10^3, \mathrm{Re}_m = 10^3, \mathrm{Ta} = 1, \omega = 2\pi$.

Во-вторых, в системе в начальный период времени наблюдаются автоколебания, обусловленные установлением параметров течения и электромагнитного поля в объеме полости – рис. 2.

Наконец, при увеличении числа Тейлора до $\mathrm{Ta} = 5$ наблюдаются незатухающие автоколебания, похожие на хаотические. Отметим, что в модели [6] автоколебания возникают при увеличении числа Рейнольдса в 5 раза.

Очевидно, что течение с периодически изменяющейся объемной силой не может быть стационарным в обсуждаемой области параметров. Поэтому модели типа [4-5], в которых используется среднее значение силы электромагнитного происхождения, могут служить лишь для качественного описания явлений. Тем не менее, в работе [5] было получено удовлетворительное согласие расчетных профилей течения с экспериментальными данными, что, видимо, объясняется слабой чувствительностью модели трехмерного вязкого течения к изменению характера действующей силы при усреднении параметров течения по времени [19].

Включение объемной турбулентной вязкости электромагнитного поля с $k = k_1 = 1$ полностью подавляет хаотические автоколебания. Отметим, что скорость потока при включении объемной турбулентной вязкости электромагнитного поля с $k = 1$ понижается на порядок по сравнению со случаем $k = 0$, хотя электромагнитное поле проникает на всю глубину полости. Это объясняется тем, что сила, обусловленная градиентом дивергенции векторного потенциала – второе слагаемое в скобках в правой части (19), тормозит поток. Если эту силу положить равной нулю, то в полости возбуждаются незатухающие автоколебания. Таким образом, было установлено, что сила, обусловленная градиентом скалярного потенциала, снижает интенсивность турбулентности путем торможения потока.

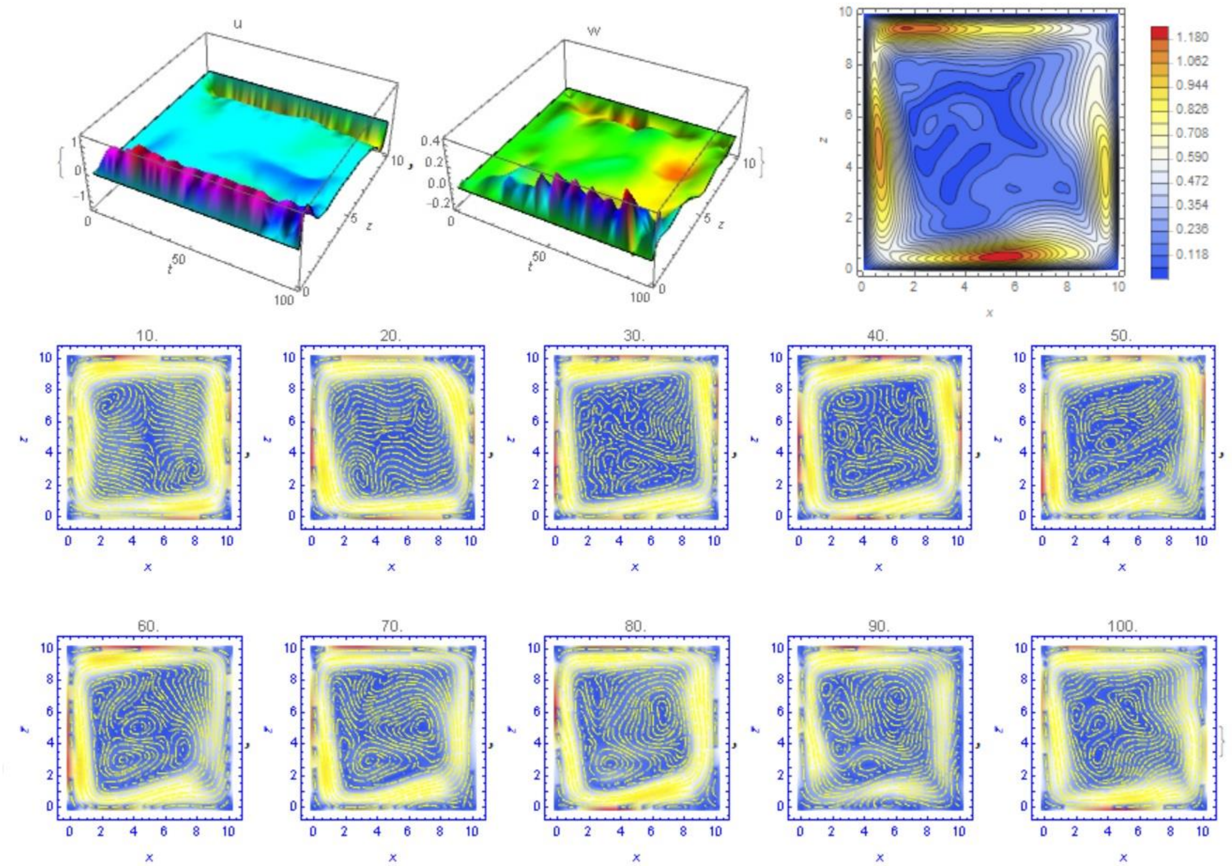

Рис. 3. Компоненты скорости в плоскости (t,x) в сечении $x = L_x/2$, изолинии модуля скорости в момент времени $t = 100$, линии тока в различные моменты времени (указаны над рисунками). Параметры модели: $k = 1, k_1 = 1, \mathrm{Re} = 10^3, \mathrm{Re}_m = 10^3, \mathrm{Ta} = 10^3, \omega = 2\pi$.

В этой связи заметим, что в численных моделях вихревого МГД течения во вращающемся магнитном поле [4-5] используется нестационарное уравнение Навье-Стокса, в котором сила, обусловленная действием магнитного поля, усредняется по времени в соответствии с гипотезой [7]. Кроме того, используется калибровка для векторного потенциала $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, но при этом считается, что электростатический потенциал вносит свой вклад в процесс генерации замкнутых токов в проводящей жидкости. Этот вклад действительно является существенным, как было установлено в численных экспериментах.

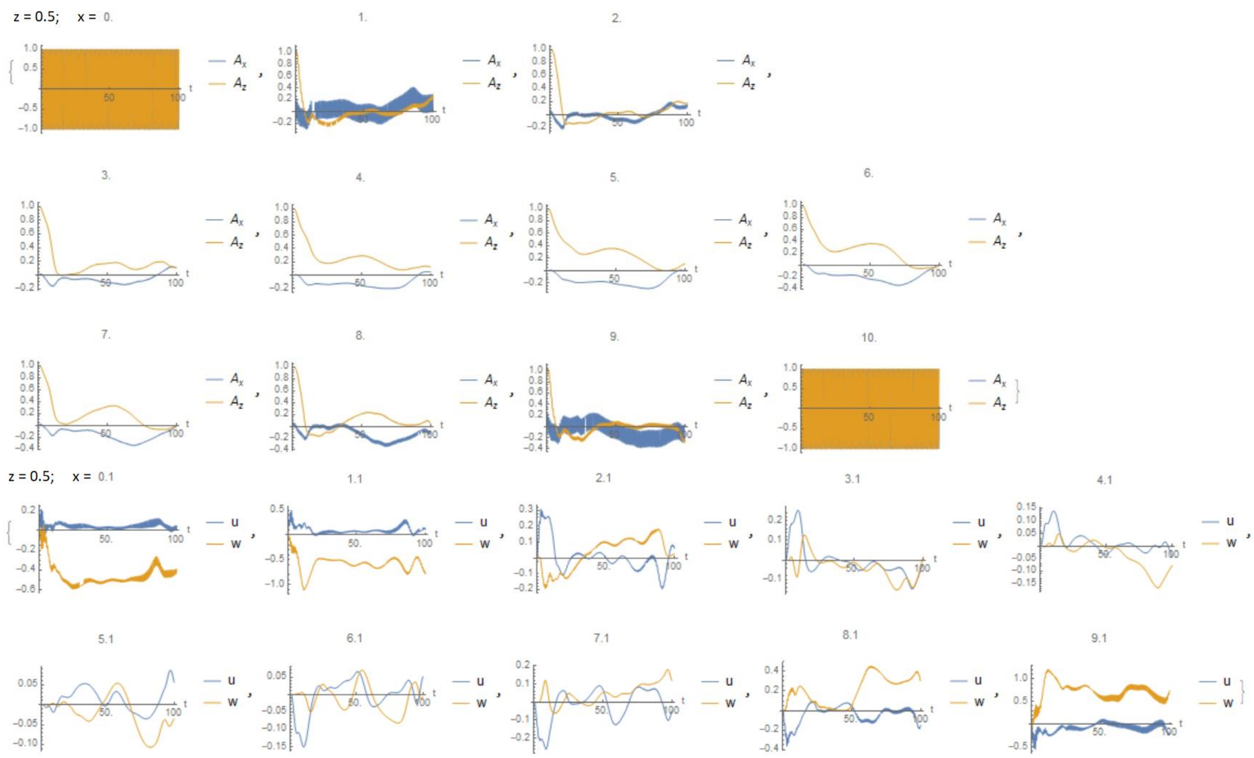

Рис. 4. Осциллограммы составляющих векторного потенциала и скорости течения в сечении $z=1/2$ в различные точках, указанных над рисунками. Параметры модели: $k=k_1=1, \mathrm{Re}=10^3, \mathrm{Re}_m=10^3, \mathrm{Ta}=10^3, \omega=2\pi$.

На рис. 3-4 представлены данные моделирования МГД течения в прямоугольной полости со сторонами $L_x=L_z=10$, с числами Рейнольдса и Тейлора $\mathrm{Re}=10^3, \mathrm{Re}_m=10^3, \mathrm{Ta}=10^3$ и с параметрами $k==k_1=1,\ \omega=2\pi$ во вращающемся электромагнитном поле.

Определим число Тейлора для обычного вязкого потока по данным на рис. 3-4. Учитывая, что $\mathrm{Ta}_\nu \sim L^2/\nu$, находим $\mathrm{Ta}_\nu=\mathrm{Ta}\, L_x^2\, \mathrm{Re}=10^8$. Как известно, потеря устойчивости течения в прямоугольной полости происходит при значении магнитного числа Тейлора $Ta_c = 1.3 \times 10^5$ [10]. Следовательно, данные на рис 3-4 получены в глубоко турбулентной области. Тем не менее, поля скорости и векторного потенциала изменяются вполне регулярно, а размытые линии на рис. 4 отображают периодическое изменение объемной силы (19).

Обнаруженное свойство турбулентного МГД течения легко поддается экспериментальной проверке. Для этого заметим, что в геофизических приложениях, например, в задачах моделирования геомагнитного поля, число Тейлора может достигать огромной величины за счет большого масштаба течения. При этом течение в модели (18), (19) содержит когерентные структуры – рис. 3, что также наблюдается в природе, например, в форме петлевых протуберанцев на Солце [20].

На рис. 5 представлены данные зависимости среднего углового момента турбулентного течения от магнитного числа Тейлора в диапазоне от 1.3 до 1000, что соответствует диапазону от $Ta_c = 1.3 \times 10^5$ до $\mathrm{Ta}_v = \mathrm{Ta}\, L_x^{\,2}\, \mathrm{Re} = 10^8$. Параметры модели (18), за исключением магнитного числа Тейлора, соответствуют данным на рис. 3-4. Как и следовало ожидать, в области 1.3<Ta <10 наблюдается известный закон 2/3 [4], выведенный в работе [21] для цилиндрической полости. Однако в диапазоне 10<Ta <1000 наблюдается зависимость среднего углового момент от магнитного числа Тейлора в степени ½, что характеризует развитое турбулентное течение.

Следует заметить, что в турбулентном течении в начальный период времени наблюдаются автоколебания скорости с большой амплитудой – рис. 3-4. Поэтому результаты усреднения углового момента, вычисленные при t=100 и при t=1000 получаются различные – данные 1, 2 на рис. 5 соответственно. Этим, в частности, объясняется зависимость углового момента от частоты – рис. 6.

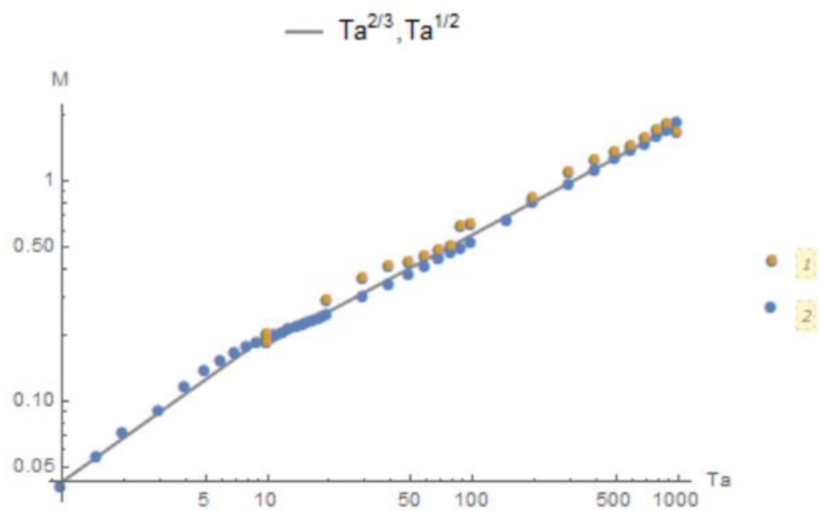

Рис. 5. Зависимости среднего углового момента от магнитного числа Тейлора для неустановившегося (1) и установившегося (2) течения.

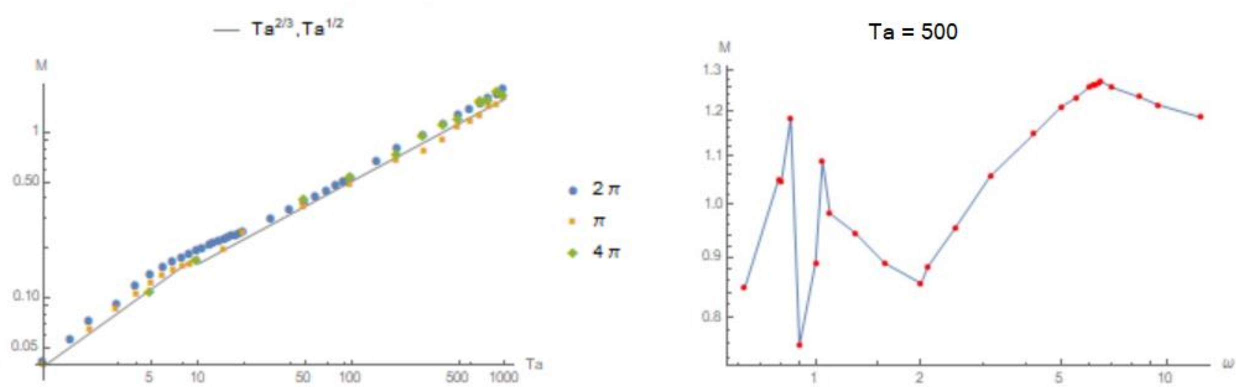

Рис. 6. Зависимости среднего углового момента от магнитного числа Тейлора и частоты: слева - для основной, половинной и удвоенной частоты; справа – при Ta = 500.

Так, при увеличении или уменьшении частоты вдвое сохраняются зависимости, указанные над рис. 5-6 (слева), однако при значительном изменении частоты наблюдаются колебания углового момента, обусловленные резонансами поля – рис. 6 справа.

На рис. 7 представлены компоненты скорости и векторного потенциала в плоскости (t, x) в сечении $x = L_x / 2$ при Ta=500 и для четырех частот. Из представленных на рис 6-7 данных следует, что влияние частоты является весьма существенным, хотя зависимость от частоты исключается в моделях типа [4-5, 21].

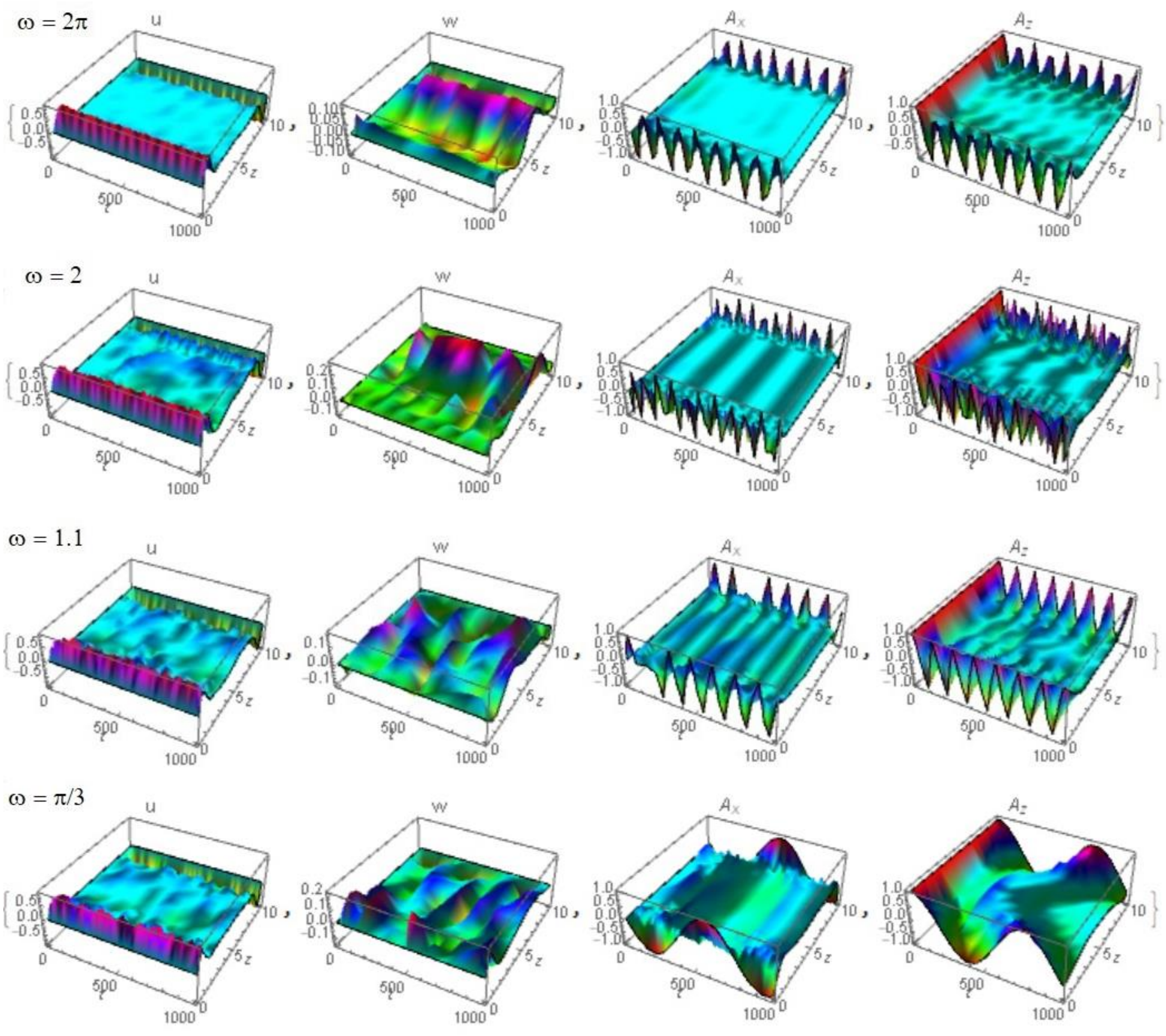

Рис. 7. Компоненты скорости и векторного потенциала в плоскости (t, x) в сечении $x = L_x / 2$ при Ta=500 и для четырех частот.

Возникающие в системе нелинейные колебания, с частотой на порядок меньшей основной частоты, заметно влияют не только на локальные значения полей рис. 7, но и на средний угловой момент – рис. 6. Подобные колебания рассматривались в нашей работе [8] как источник турбулентного шума.

Наконец, заметим, что развитая выше модель турбулентного МГД течения в переменном электромагнитном поле может оказатся полезной в решении проблемы моделирования вихревых структур в недрах планет и на Солнце [20].

Библиографический список

1. Wolfram S. A New Kind of Science. Wolfram Media incorporated. 2002.
2. Трунев А.П., Луценко Е.В. Автоматизированный системно-когнитивный анализ влияния факторов космической среды на ноосферу, магнитосферу и литосферу Земли: Под науч. ред. д.т.н., проф. В.И.Лойко. Монография (научное издание). – Краснодар, КубГАУ. 2012. – 480 с. ISBN 978-5-94672-519-4
3. Emmanuel de Bézenac, Arthur Pajot, Patrick Gallinari. Deep Learning for Physical Processes: Incorporating Prior Scientific Knowledge// arXiv:1711.07970v1 [cs.AI] 21 Nov 2017.
4. Stiller J., Frana K. A numerical study of flows driven by a rotating magnetic field in a square container// European J. Mechanics B/Fluids, 27, pp. 491-500, 2008.
5. Galindo V., et al. Rotating magnetic field driven spin-up flow in a rectangular cavity//arXiv:1612.011740v1, 6 Dec 2016.
6. Трунев А.П. Моделирование турбулентного МГД течения в прямоугольной полости во вращающемся магнитном поле / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №10(124). С. 1244 – 1269. – IDA [article ID]: 1241610079. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/10/pdf/79.pdf, 1,625 у.п.л.
7. Davidson P.A., Hunt J.C.R. Swirling recirculating flow in liquid-metal column generated by a rotating magnetic field//J. Fluid Mech., 185, p. 67-106, 1987.
8. Трунев А.П. Физические механизмы турбулентной вязкости и моделирование турбулентности на основе уравнений Навье-Стокса// Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №04(118). С. 1469 – 1487. – IDA [article ID]: 1181604096. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/04/pdf/96.pdf
9. Трунев А.П. Моделирование турбулентного течения в полости на основе уравнений Навье-Стокса / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный

журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2016. – №05(119). С. 1111 – 1133. – IDA [article ID]: 1191605079. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2016/05/pdf/79.pdf

10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М., Наука, 1982.
11. Boozer A. H. Mathematics and Maxwell's equations// Plasma Physics and Controlled Fusion 52, 12, 124002, 2010.
12. Kholodenko A. L. Optical knots and contact geometry I. From Arnold inequality to Ranada's dyons// Anal. Math. Phys. 6 (2016) no. 2, 163–198, arXiv:1402.1793 [math-ph].
13. Daniel W.F. Alvesa, Carlos Hoyosb, Horatiu Nastasea and Jacob Sonnenscheinc. Knotted solutions, from electromagnetism to fluid dynamics//arXiv:1707.08578v1 [hep-th] 26 Jul 2017.
14. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика – 3 изд. – М.: Наука. – 1986.
15. Трунев А.П. Закон Бэра и гипотезы Эйнштейна о вихрях / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №09(133). С. 630 – 652. – IDA [article ID]: 1331709048. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/09/pdf/48.pdf, 1,438 у.п.л.
16. Трунев А.П. Моделирование гексагонального турбулентного течения в северной полярной области Сатурна / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №01(125). С. 738 – 759. – IDA [article ID]: 1251701050. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/01/pdf/50.pdf, 1,375 у.п.л.
17. Трунев А.П. Моделирование атмосферных вихревых течений на Юпитере и Сатурне / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №02(126). С. 697 – 721. – IDA [article ID]: 1261702050. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/02/pdf/50.pdf, 1,562 у.п.л.
18. Трунев А.П. Теория турбулентности и моделирование диффузии примесей в приземном слое атмосферы. – Сочинский научно-исследовательский центр РАН, Сочи, 160 с., 1999.
19. Terence Tao. Finite time blowup for an averaged three-dimensional Navier-Stokes equation// arXiv:1402.0290v3 [math.AP] 1 Apr 2015.
20. Трунев А.П. Вихревые турбулентные течения в атмосферах планет и на Солнце / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2017. – №10(134). С. 1411 – 1435. – IDA [article ID]: 1341710109. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2017/10/pdf/109.pdf
21. Davidson P. Swirling flow in an axisymmetric cavity of arbitrary profile, driven by a rotating magnetic field//J. Fluid Mech., 254, p. 653-663, 1992.