Chaos and Correlation
International Journal, January 29, 2012

Динамика кварков в метрике адронов и структура ядра

Dynamics of quarks in the hadrons metrics and the structure of nuclei

Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)

Alexander P. Trunev

В работе рассмотрена система уравнений Дирака, описывающая динамику кварков в метрике адронов. Сформулирована модель обмена кварками в системе нейтрон-протон. Вычислен магнитный момент и энергия связи нуклонов в случае ядра дейтерия.

In this paper we consider a system of Dirac equations describing the dynamics of quarks in hadrons metric. The model of exchange of quarks in the neutron-proton system developed, and magnetic moment and the energy of the nucleons in the case of deuterium nuclei calculated.

Ключевые слова: адроны, дейтерий, кварки, магнитный момент, метрика, нейтрон, протон, уравнение Дирака, теория Янга-Миллса.

Keywords: hadrons, deuterium,quarks, magnetic moment, metric, neutron, proton, Dirac equation, Yang-Mills equations.

Введение

Модели квантовой хромодинамики в плоской метрике широко используется для моделирования адронов и атомных ядер [1-5]. В работе [6] сформулирована модель метрики адронов, удовлетворяющая основным требованиям физики элементарных частиц и космологии. В работе [7] рассмотрена динамика кварков в метрике [6] с векторным полем Янга-Миллса. Получены результаты по магнитным моментам барионов, согласующиеся с экспериментом с высокой точностью. В настоящей работе рассмотрено применение модели динамики кварков к моделированию магнитных моментов и энергии связи нуклонов в ядре дейтерия в скалярном поле.

Основные уравнения модели метрики адронов

Рассмотрим центрально-симметричную метрику вида [6-8]

$$\Psi = \eta_{ij}\omega^i\omega^j = -dt^2 + e^{2\nu}dr^2 + d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2$$
$$\frac{d^2\sigma}{d\theta^2} = -\kappa\sigma \qquad (1)$$

$$\omega^1 = dt, \omega^2 = e^{\nu}dr, \omega^3 = d\theta, \omega^4 = \sigma d\varphi$$

Здесь $\eta_{ij} = \eta^{ij}$ - метрический тензор пространства Минковского сигнатуры (- + + +), $\kappa = const$ - гауссова кривизна квадратичной формы $d\theta^2 + \sigma^2(\theta)d\varphi^2$, Функция $\nu = \nu(r,t)$ определяется путем решения уравнений Янга-Миллса [8]. Всюду, где не оговорено, используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

Среди всех решений уравнений Янга-Миллса, в случае метрики (1), есть такое, которое выражается через эллиптическую функцию Вейерштрасса [8]. В этом случае уравнения модели приводятся к виду [6]:

$$A_{\tau\tau} = \frac{1}{2}(A^2 - \kappa^2), e^{\nu} = A_{\tau}, \quad \tau = t \pm r + \tau_0$$
$$A = \sqrt[3]{12}\wp(\tau/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3), \qquad (2)$$
$$b_{11} = -b_{22} = \frac{1}{3}A - \frac{\kappa}{6}, b_{33} = b_{44} = \frac{1}{6}A - \frac{\kappa}{3}, b_{12} = b_{21} = 0.$$

Здесь обозначено: g_2, g_3 - инварианты функции Вейерштрасса, причем $g_2 = \kappa^2\sqrt[3]{12}$; τ_0 – свободный параметр, связанный с выбором начал координат; $b_{ij} + b_{ji} - 2(\eta^{ij}b_{ij})\eta_{ij} = T_{ij}$ - тензор энергии-импульса материи. Отметим, что в этих обозначениях уравнения Эйнштейна имеют вид

$$b_{ij} + b_{ji} + b\eta_{ij} = R_{ij} \qquad (3)$$

$b = \eta^{ij}b_{ij}$; R_{ij} - тензор Риччи.

Положим $g_2 = \sqrt[3]{12}, g_3 = 1$, тогда полупериоды функции Вейерштрасса определяются в виде $\omega_1 = 1.33003, \omega_2 = 0.66501 + 1.61260i$. Отметим, что вычисление полупериодов и построение 3D изображений осуществлялось с использованием системы Wolfram Mathematica 9.0 [9].

В метрике (2) можно определить дефект решетки типа пузыря. В области пузыря считаем, что $A^2 = \kappa^2$, а во внешней области решение зададим в виде (2), имеем

$$\begin{gathered} A^2 = \kappa^2, e^{\nu} = 0, \quad |\tau| < \tau_0 \\ A = \sqrt[3]{12}\wp(\tau/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3), e^{\nu} = A_{\tau}, |\tau| > \tau_0 \end{gathered} \tag{4}$$

На границах пузыря непрерывна функция A и ее первая производная,

$$\kappa = \sqrt[3]{12}\wp(\tau_0/\sqrt[3]{12}; g_2, g_3), A_{\tau} = 0, |\tau| = \tau_0 \tag{5}$$

В частном случае решетки с инвариантами заданными в виде $g_2 = \sqrt[3]{12}, g_3 = 1$, находим первый ноль и соответствующее значение параметра метрики $\tau_0 = 3.0449983, \kappa = 2.1038034$. Отметим, что метрика во внутренней области пузыря является трехмерной, поскольку не содержит радиальной координаты. Действительно, используя уравнения (1) и (4), находим

$$\Psi = -dt^2 + d\theta^2 + \cos^2(\sqrt{\kappa}\theta + \theta_0)d\varphi^2 \tag{6}$$

Аналогично строится решение для других корней второго уравнения (5). Все эти решения отличаются только размером пузыря, тогда как значение параметра κ не меняется.

Всякий пузырь можно вывернуть наизнанку, просто изменив на противоположные неравенства (4). В этом случае можно до определить метрику во внешней области пузыря, используя решение первого уравнения (2), так, чтобы метрика внешнего пространства совпала с метрикой нашей Вселенной [6]. Наконец, третий тип частиц можно составить как комбинацию двух первых, в результате возникает пузырь, ограниченный оболочкой конечной толщины.

Преобразуем метрику (6) к стандартному виду. Для этого умножим обе части выражения (6) на постоянное число $-\kappa$ и введем новые переменные, отличающиеся от старых переменных на постоянный множитель $\sqrt{\kappa}$, в результате находим

$$\Psi \to \Psi_1 = dt^2 - d\theta^2 - \sin^2\theta d\varphi^2 \quad (7)$$

Метрика (7) использовалась для моделирования структуры барионов [7], в том числе протона и нейтрона.

Динамика кварков

Для описания динамики кварков во внутренней области пузыря с метрикой вида (7) рассмотрим систему уравнений Дирака во внешнем поле Янга-Миллса. Отметим, что согласно (2) в метрике (7) тензор энергии импульса является постоянным. Следовательно, будем предполагать, что поле Янга-Миллса во внутренней области пузыря сводится к некоторой совокупности констант. В настоящей модели использованы три константы, а само поле описывается скалярным и векторным потенциалом

$$B^b_\mu = (\phi^b, A^b_\mu)$$

Кроме того, будем учитывать электромагнитное поле, которое генерируют кварки. Используя результаты работы [10], преобразуем уравнение Дирака к криволинейным координатам (7). Имеем систему уравнений

$$i\gamma^\mu (\nabla_\mu + iq_{ab} A^b_\mu)\psi_a = m_{ab}\psi_a \quad (8)$$

Здесь обозначено $\gamma^\mu, q_{ab}, A^b_\mu, \psi_a, m_{ab}$ - матрицы Дирака, параметры взаимодействия, векторный потенциал, волновая функция и эффективная масса поля кварка a входящего в состав частицы b соответственно. Матрицы Дирака в метрике (7) имеют вид

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & ie^{i\varphi} & 0 \\ 0 & ie^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -ie^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin\theta & e^{-i\varphi}\cos\theta \\ 0 & 0 & e^{i\varphi}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -e^{-i\varphi}\cos\theta & 0 & 0 \\ -e^{i\varphi}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В этих обозначениях оператор Дирака в метрике (7) можно представить в форме

$$\gamma^\mu \nabla_\mu = \gamma^0 \partial_t + \gamma^\theta \partial_\theta + \frac{\gamma^\varphi}{\sin\theta}\partial_\varphi$$

Поскольку кварки обладают электрическим зарядом, они генерируют электромагнитное поле, посредством которого взаимодействуют друг с другом. Для описания этого взаимодействия используем уравнения квантовой электродинамики в форме

$$\alpha q_{ab} \bar{\psi}_a \gamma^\mu \psi_a = (\partial_t^2 - \nabla^2) A_e^\mu \tag{9}$$

Здесь $\alpha = e^2/\hbar c$ - постоянная тонкой структуры, $\bar{\psi}_a = \psi_a^+ \gamma^0, \psi_a^+$ - сопряженный (по Эрмиту) вектор. Таким образом, предполагаем, что токи и заряды кварков суммируются, создавая коллективное поле, с которым кварки взаимодействуют в соответствии с уравнениями (8).

Система уравнений (8)-(9) использовалась для моделирования динамики кварков в случае барионов [7]. В простейшем случае, в котором учитывается только одно электромагнитное поле, модель содержит 3х4+3=15 нелинейных уравнений в частных производных. Для понижения порядка системы представим решение уравнений (8)-(9) в форме

$$\psi_a = e^{-i\omega t + iL\varphi} \begin{pmatrix} f_1(\theta) \\ f_2(\theta)e^{i\varphi} \\ if_3(\theta) \\ if_4(\theta)e^{i\varphi} \end{pmatrix}_a \tag{10}$$

Здесь L, ω - проекция углового момента на выделенную ось и энергия системы соответственно. Система уравнений Дирака для случая представления решения в форме (10), приводится к виду,

$$\begin{aligned}
& f_1' = (L + q_{ab}A_b \sin\theta)(f_1 \cot\theta + f_2) + f_2 + \\
& (m_{ab} + \omega - q_{ab}\Phi_b)(f_3 \sin\theta - f_4 \cos\theta) \\
& f_2' = (L + q_{ab}A_b \sin\theta)(f_1 - f_2 \cot\theta) - f_2 \cot\theta - \\
& (m_{ab} + \omega - q_{ab}\Phi_b)(f_3 \cos\theta + f_4 \sin\theta) \\
& f_3' = (m_{ab} - \omega + q_{ab}\Phi_b)(f_1 \sin\theta - f_2 \cos\theta) + \\
& (L + q_{ab}A_b \sin\theta)(f_3 \cot\theta + f_4) + f_4 \\
& f_4' = -(m_{ab} - \omega + q_{ab}\Phi_b)(f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta) + \\
& (L + q_{ab}A_b \sin\theta)(f_3 - f_4 \cot\theta) - f_4 \cot\theta
\end{aligned} \tag{11}$$

Здесь предполагается, что $A_b = A_e + A_{YM}, \Phi_b = \Phi_e + \Phi_{YM}$.

Отметим, что масса и заряд являются индивидуальными для каждого кварка, а момент и энергия всей системы выбираются из условия образования стоячих волн вдоль меридиональной координаты. Вычисляя ток в левой части уравнения (9) и оператор набла в правой части, находим уравнения, описывающие электродинамическую часть потенциала

$$\alpha q_{ab}\bar{\psi}_a \gamma^0 \psi_a = \alpha q_{ab} \left(\sum_{i=1}^{4} f_i^2 \right)_a = -\Phi_e'' - \Phi_e' \cot\theta \,, \tag{12}$$

$$\alpha q_{ab}\bar{\psi}_a \gamma^\varphi \psi_a = 2\alpha q_{ab}\left(f_1 f_4 - f_2 f_3\right)_a = -A_e'' - A_e' \cot\theta + \frac{A_e}{\sin^2\theta} \,,$$

$$\bar{\psi}_a \gamma^\theta \psi_a = 0 \,.$$

Здесь по индексу a осуществляется суммирование по всех кваркам, входящим в систему. Таким образом, в случае нуклонов задача сводится к решению системы из 14 обыкновенных дифференциальных уравнений, а в случае дейтрона число уравнений в системе вырастает до 26.

Как известно, электромагнитные свойства элементарных частиц характеризуются электрическим зарядом и магнитным моментом. Поэтому параметры поля Янга-Миллса, фигурирующие в уравнениях (11), должны быть связаны с величиной заряда и магнитного момента системы кварков, которые для данной системы определяются следующим образом

$$Q_b = \int dV q_{ab} \bar{\psi}_a \gamma^0 \psi_a = 4\pi \int_0^{\pi/2} d\theta \sin\theta q_{ab} \left(\sum_{i=1}^{4} f_i^2 \right)_a \tag{13}$$

$$\mu_b = \frac{1}{2} \int dV [\mathbf{r} \times \mathbf{j}]_z = 2\pi \mu_q \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta\, q_{ab} \bar{\psi}_a \gamma^\varphi \psi_a =$$

$$4\pi \mu_q \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^2\theta \sum_a q_{ab} (f_1 f_4 - f_2 f_3)_a$$

В качестве единицы измерения массы возьмем 1 МэВ, тогда параметры поля Янга-Миллса, векторный потенциал и энергия системы будут выражаться в единицах МэВ. Единицей магнитного момента в этом случае является $\mu = e\hbar / MeV = 2\mathrm{m}_e \mu_B \approx 1.0219978 \mu_B$, где μ_B - магнетон Бора. Сомножителем здесь выступает удвоенная масса электрона, выраженная в принятых единицах массы.

Модель нуклонов

Влияние векторного потенциала на параметры барионов исследовалось в работе [7]. Было установлено, что масштаб изменения параметров векторного поля Янга-Миллса не превышает 1 МэВ. Следовательно, можно исключить это поле из рассмотрения, заменив его скалярным потенциалом, влияющим на эффективную массу кварков [11]. Решение системы уравнений (11)-(12) с нулевым векторным потенциалом Янга-Миллса можно получить в виде ряда по степеням параметра α. Для системы кварков основное состояние с нулевым моментом представляется в стандартном виде

$$L = 0,\ f_1 = f_{ab},\ f_2 = 0,\ f_3 = g_{ab}\cos\theta,\ f_4 = g_{ab}\sin\theta \tag{14}$$

В случае (14) система уравнений (11) с нулевым векторным потенциалом приводится к виду:

$$2g_{ab} + (m_{ab} - \omega_{ab})f_{ab} = 0,\ \omega_{ab} = -m_{ab} \tag{15}$$

Вычисляя компоненты 4-вектора тока, и используя первое условие нормировки (13), находим

$$\begin{gathered} j^0 = f_{ab}^2 + g_{ab}^2 = (1 + m_{ab}^2)f_{ab}^2, \\ j^\varphi = 2f_{ab}g_{ab}\sin\theta = -2m_{ab}f_{ab}^2\sin\theta, \\ 4\pi j^0 = 1,\ f_{ab}^2 = \frac{1}{4\pi(1 + m_{ab}^2)} \end{gathered} \tag{16}$$

Используем полученные результаты для вычисления магнитных моментов нейтрона и протона. Общие свойства исследуемых нуклонов и кварков представлены в таблицах 1-2.

Таблица 1. Свойства барионов

Symbol	Spin	Charge	Mass	BaryonNumber	GFactor	Hypercharge	Isospin	QuarkContent
p	$\frac{1}{2}$	1	938.27203	1	5.585694713	1	$\frac{1}{2}$	{{DownQuark, UpQuark, UpQuark}}
$\bar{p}$	$\frac{1}{2}$	−1	938.27203	−1	5.585694713	−1	$\frac{1}{2}$	{{DownQuarkBar, UpQuarkBar, UpQuarkBar}}
n	$\frac{1}{2}$	0	939.56536	1	−3.82608545	1	$\frac{1}{2}$	{{DownQuark, DownQuark, UpQuark}}
$\bar{n}$	$\frac{1}{2}$	0	939.56536	−1	−3.82608545	−1	$\frac{1}{2}$	{{DownQuarkBar, DownQuarkBar, UpQuarkBar}}

Таблица 2. Свойства кварков

Symbol	Spin	Charge	Mass	BaryonNumber	Bottomness	Charm	Hypercharge	Isospin	Strangeness	Topness
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	2.2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\bar{u}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	2.2	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0
d	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	5.0	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\bar{d}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	5.0	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	0

Если предположить, что в составе протона кварки типа u имеют антипараллельные спины, а в составе нейтрона кварки d имеют антипараллельные спины, тогда магнитный момент протона зависит от эффективной массы d кварка, а магнитный момент нейтрона зависит от эффективной массы u кварка. В этих предположениях находим

$$\mu_b/\mu_q = -(2/3) m_{ab} q_{ab}/(1+m_{ab}^2),\ b=n,p;\ a=u,d \tag{17}$$

В случае протона имеем $\mu_p/\mu_q = 1.5544916\times 10^{-3}$, соответственно уравнение (17) имеет два корня $m_{dp} = 142.948\,MeV;\ 0.00699556\,MeV$. Для нейтрона $\mu_n/\mu_q = -1.06479466\times 10^{-3}$, а эффективная масса u кварка имеет два значения: $m_{un} = 417.397\,MeV;\ 0.0023958\,MeV$. Следовательно, в каждом случае имеем два корня уравнения (17). Один из них соответствует очень малой энергии кварков порядка нескольких кэВ.

Модель дейтрона

Как известно, нуклоны объединяются в атомные ядра под влиянием ядерных сил. Однако сами ядерные силы долгое время оставались загадкой, не смотря на многочисленные феноменологические модели, в которых ядерные силы моделировались гипотетическими потенциалами типа потенциала Юкава, Вудса-Саксона или квантового гармонического осциллятора, положенного в основу модели ядерных оболочек [12]. Заметный прогресс в моделировании ядерных сил связан с развитием квантовой хромодинамики [13-14] и численных моделей нуклонов и легких ядер [1-5].

Объединяя два пузыря, путем погружения одного пузыря в другой, приходим к метрике ядра дейтерия — рис. 1. В этом случае возможны две комбинации, когда нейтрон погружен в протон — структура D={n,p}, и когда протон погружен в нейтрон, D={p,n}.

Можно предположить, что нуклоны образуют атомные ядра в состоянии с низкой энергией кварков. Эффективная масса кварка связана с массой покоя и потенциалом скалярного поля линейным уравнением

$$m_{ab}=m_a+\lambda_{ab}\phi_b \tag{18}$$

Здесь λ_{ab} - параметр взаимодействия кварков с полем Янга-Миллса. Таким образом, если предположить, что в основном состоянии эффективная масса совпадает с минимальным корнем уравнения (16), то из уравнения (18) следует простая оценка

$$m_a \approx -\lambda_{ab}\phi_b\, , a=u\, , d\, ; b=n\, , p. \tag{19}$$

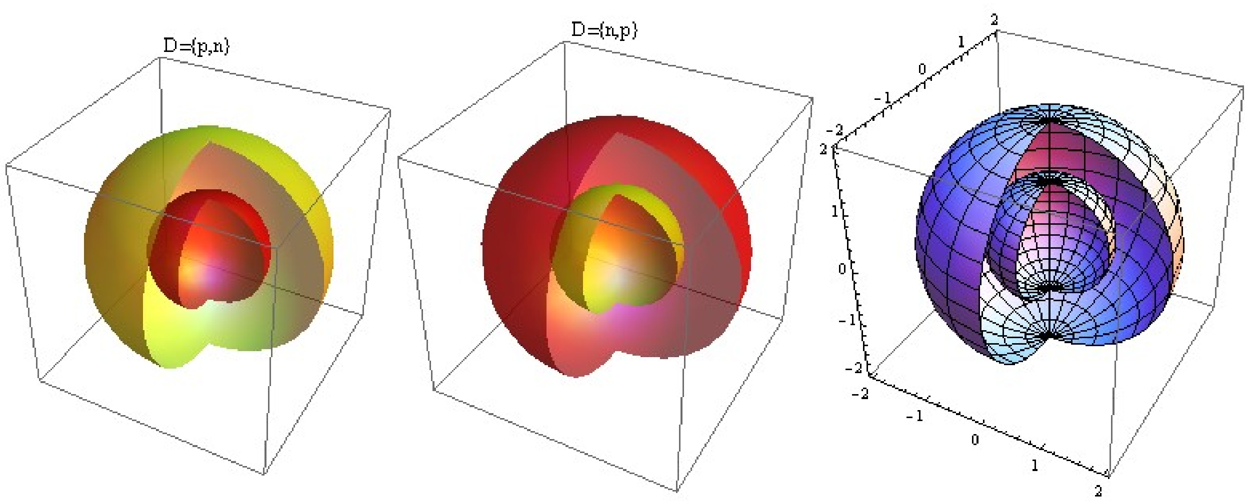

Рис. 1. Модель метрики ядра дейтерия: слева протон погружен в нейтрон, в центре нейтрон погружен в протон, справа геометрия двух метрик типа (7).

Используя приведенную выше модель барионов, можно оценить магнитный момент и энергию связи нуклонов в ядре дейтерия. Будем предполагать, что спины нейтрона и протона параллельны. Тогда магнитный момент системы оценивается просто как сумма магнитных моментов протона и нейтрона, что составляет

$$\mu_D \approx \mu_p+\mu_n=(2.792847356-1.91304272)\mu_N=0.879805\,\mu_N \tag{20}$$

Экспериментальное значение магнитного момента дейтрона равно $\mu_D = 0.857438230\,\mu_N$, что отличается от величины в правой части (20) на 2.6%.

Энергию связи можно оценить, используя гипотезу, что общая энергия связи складывается из разности потенциалов Янга-Миллса, тогда для системы D={p,n}, состоящей из протона в нейтроне — см. рис. 1, имеем с учетом (19)

$$E_b \approx m_u = 2.2\,MeV \tag{21}$$

Полученная оценка лишь на 1% отличается от энергии связи дейтрона $E_b = 2.22457\text{MeV}$. Детальный расчет магнитных моментов и энергии связи осуществляется в рамках численной модели, описанной в работе [7]. Объединенная модель дейтрона включает 26 обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются численными методами, реализованными в системе [9].

Возникает вопрос, почему в природе не реализуется комбинация нуклонов типа нейтрон вложенный в протон с энергией связи порядка массы d кварка? Можно предположить, что эта комбинация реализуется в ядре трития, которое состоит из двух нейтронов и одного протона - рис. 2. В этом случае полная энергия связи составляет 8.4818 МэВ, что близко к величине суммарной массы u и d кварков.

Можно предположить, что и в общем случае при любом числе нуклонов атомные ядра организованы по принципу вложенных оболочек. Эта гипотеза согласуется с теорией ядерных оболочек [12,15-16]. Отметим, что в [15-16] ядерные силы моделировались векторным потенциалом в пространстве пяти измерений на основе модифицированной теории Калуцы-Клейна. В рамках этой модели была вычислена энергия связи нуклонов для всех известных нуклидов.

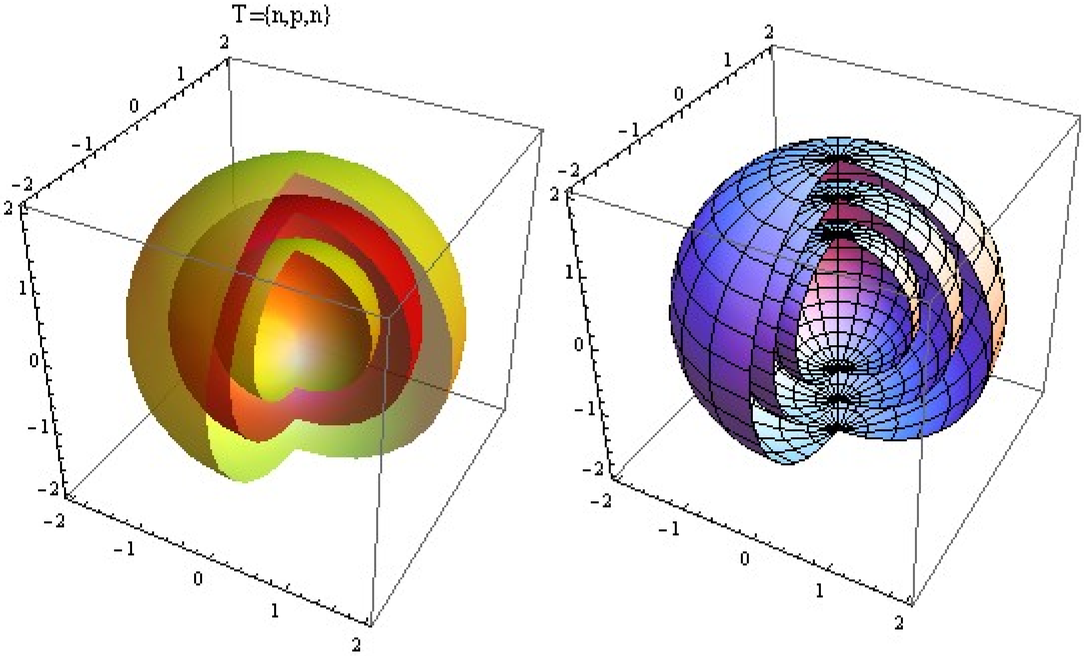

Рис. 2. Модель метрики ядра трития.

Таким образом, развитая модель позволяет объяснить природу ядерных сил, которые обусловлены, главным образом, метрикой адронов и топологией атомных ядер. Сами ядра состоят из оболочек с метрикой типа (7) и остова, состоящего из глюонного конденсата. Такая модель позволяет описать свойства всех известных нуклидов [15-16] и адронов [17-18].

References

1. S. Durr, Z. Fodor, J. Frison *et all*. Ab Initio Determination of Light Hadron Masses// Science, 21 November 2008: Vol. 322, no. 5905 pp. 1224-1227.
2. R. G. Edwards (LHPC Collaboration), B. Joó (UKQCD Collaboration). The Chroma Software System for Lattice QCD// arXiv:hep-lat/0409003, Proceedings of the 22nd International Symposium for Lattice Field Theory (Lattice2004), Nucl. Phys B1 40 (Proc. Suppl) p832, 2005.

3. Doron Gazit, Sofia Quaglioni and Petr Navratil. Three-Nucleon Low-Energy Constants from the Consistency of Interactions and Currents in Chiral Effective Field Theory//arXiv:0812.4444v2 [nucl-th] 21 Sep 2009

4. S. Quaglioni, P. Navratil,R. Roth, and W. Horiuchi. From nucleons to nuclei to fusion reactions//arXiv:1203.0268 [nucl-th]

5. M. Hirai, H. Kawamura, S. Kumano, and K. Saito. Selected topics on parton distribution functions//arXiv:1111.0353v1 [hep-ph] 2 Nov 2011.

6. Трунев А.П. Моделирование метрики адронов на основе уравнений Янга-Миллса // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №10(84). С. 874 – 887. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/10/pdf/68.pdf, 0,875 у.п.л.

7. Трунев А.П. Динамика кварков в метрике адронов и структура барионов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2013. – №01(85). С. 525 – 542. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2013/01/pdf/42.pdf

8. Л.Н. Кривоносов, В.А. Лукьянов. Полное решение уравнений Янга-Миллса для центрально-симметричной метрики// Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics 2011, 4(3), 350-362.

9. Wolfram Mathematica 9.0/ http://www.wolfram.com/mathematica/

10. V. Dzhunushaliev. Canonical conjugated Dirac equation in a curved space// arXiv:1202.5100, Feb. 25, 2012.

11. J.J.J. Kokkedee. The Quark Model. – W.A. Benjamin Inc., NY-Amsterdam, 1969.

12. Maria Goeppert-Mayer. On Closed Shells in Nuclei/ DOE Technical Report, Phys. Rev. Vol. 74; 1948. II DOE Technical Report, Phys. Rev. Vol. 75; 1949

13. S. Weinberg, Physica 96A, 327 (1979); Phys. Lett. B 251, 288 (1990); Nucl. Phys. B363, 3 (1991);

14. G. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. 158, 142 (1984).

15. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И. Менделеева / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ)

[Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №05(79). С. 414 – 439. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/05/pdf/29.pdf

16. Трунев А.П. Ядерные оболочки и периодический закон Д.И.Менделеева. Часть 2. / А.П. Трунев // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). С. 491 – 514. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/37.pdf
17. Трунев А.П. Моделирование массы адронов и энергии возбужденных состояний атомных ядер в модели глюонного конденсата // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ) [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2012. – №07(81). С. 545 – 554. – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2012/07/pdf/40.pdf
18. Alexander Trunev. Hadrons mass spectrum and the gluon thermodynamics//Chaos and Correlation, Nov. 25, 2012, http://chaosandcorrelation.org/Chaos/CR_2_11_2012.pdf