Chaos and Correlation
International Journal, July 22, 2011

Фундаментальные взаимодействия в теории Калуцы-Клейна

А. П. Трунев (Toronto, Canada)

На основе теории Калуцы-Клейна в 5-мерном пространстве развита модель фундаментальных взаимодействий.

Ключевые слова: теория Калуцы-Клейна, гравитация, электромагнетизм, сильные взаимодействия, слабые взаимодействия, квантовая механика, нейтрон, протон, электрон

Fundamental interactions in Kaluza-Klein theory

Alexander P. Trunev (Toronto, Canada)

The fundamental interaction model is developed on the basis of Kaluza-Klein theory in 5-dimension space.

Keywords: Kaluza–Klein theory, Gravity, Electromagnetism, Strong Interaction, Weak Interaction, Quantum Mechanics, Electrons, Neutrons, Protons

1. Введение

В современной физической теории принято считать, что фундаментальные природные силы обусловлены четырьмя видами взаимодействия – гравитационным, электромагнитным, слабым и сильным, которые в пределе сверхвысоких энергий сливаются в одно, создающее суперсилу /1/. После пионерской работы Эйнштейна /2/, посвященной вопросам существования элементарных заряженных частиц в общей теории относительности (ОТО), стало ясно, что в четырехмерном пространстве нет решений гравитационных уравнений, описывающих одновременно массу и заряд. Чтобы получить решения, похожие на электрон, были предприняты многочисленные попытки описания частиц в рамках объединенной теории гравитации и электромагнетизма Калуцы-Клейна в пятимерном пространстве /3-11/.

При описании движения частиц и полей в теории Калуцы-Клейна возникает вопрос о физическом смысле пятой координаты. Согласно гипотезе Клейна /4/, движение вдоль пятой координаты ненаблюдаемо вплоть до очень малых масштабов, соответствующих энергии порядка 10^{19} масс протона. В этом пределе все взаимодействия сливаются в одно, образуя суперсилу /1/. Согласно же гипотезе Румера /6/, движение в масштабе пятого измерения представлено постоянной Планка $\hbar$ и вытекающей отсюда квантовой теорией.

Было показано /7-8/, что если пятое измерение является пространственно-подобным, то уравнения единого поля имеют обычную форму.

В работах Эйнштейна /9/, Эйнштейна и Паули /10/ было установлено, что не существует решений уравнений гравитационного поля в 4-х или в 5-мерном пространстве (Калуцы), удовлетворяющих условиям:

1) поле стационарно;

2) оно не имеет особых точек;

3) решение описывает поле отличной от нуля массы или заряда.

Анализ совместных уравнений гравитации и электромагнетизма приводит к неутешительному выводу, что в такой теории статические электрические и гравитационные поля должны быть одного порядка величины, поэтому в теориях Калуцы-Клейна все заряженные частицы должны иметь массу порядка планковской /10,11/. В силу этих теоретических трудностей теория Калуцы-Клейна была перенесена из 5-мерного пространства в 11-мерное, с заменой классической гравитации на супергравитацию /1, 11/.

В настоящей работе построен контрпример, в котором пятая координата является времени-подобной, метрический тензор в 5-мерном пространстве является стационарным, не имеет особых точек, описывает в 4-х мерном пространстве статическое поле отличной от нуля массы или ненулевого заряда. На основе разложения метрического тензора в 5-мерном пространстве по степеням расстояния до центра гравитации развита модель фундаментальных взаимодействий, которая описывает протон, электрон и нейтрон. В классическом случае теория предсказывает, что массивные тела могут обладать электрическим зарядом и магнитным полем, что находится в согласии с данными астрономических наблюдений.

2. Динамика частиц в 5-мерном пространстве и виды взаимодействий

Движение заряженных частиц в пятимерном пространстве описывается уравнением 5-эйконала /6/:

$$G^{\mu\nu}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^{\nu}}=0 \qquad (1)$$

$$g_{ik}=\frac{G_{ik}}{G_{55}}-\frac{G_{i5}G_{k5}}{G_{55}G_{55}},\quad A_i=\frac{mc^2}{e}\frac{G_{i5}}{G_{55}}=\frac{mc^2}{e}g_i$$

Здесь $G_{\mu\nu}, g_{ik}, A_i, m, e$ - метрические тензоры в 5-ти и 4-х мерном пространстве, векторный потенциал, масса и заряд частицы соответственно.

Полагая $G_{55}=N$, находим выражение метрического тензора в 5-мерном пространстве через гравитационные и электромагнитные потенциалы, имеем /4-7/

$$G_{ik}=N\begin{pmatrix} g_{ik}+g_i g_k & g_k \\ g_i & 1 \end{pmatrix} \quad G^{ik}=N^{-1}\begin{pmatrix} g^{ik} & -g^k \\ -g^i & 1+g^{ik}g_i g_k \end{pmatrix} \tag{2}$$

Используя второе выражение (2) при $N=1$, запишем первое уравнение (1) в виде

$$g^{ik}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^k}-2g^{ik}g_k\frac{\partial\Sigma}{\partial x^i}\frac{\partial\Sigma}{\partial x^5}+(1+g^{ik}g_i g_k)\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial x^5}\right)^2=0 \tag{3}$$

Переход к классической динамике осуществляется в частном случае, когда действие выражается в виде суммы

$$\Sigma = mcx^5 + S(x^1,x^2,x^3,x^4).$$

В этом случае первое уравнение (1) сводится к уравнению Гамильтона-Якоби для классического действия релятивистской частицы

$$g^{ik}\left(\frac{\partial S}{\partial x^i}-mcg_i\right)\left(\frac{\partial S}{\partial x^k}-mcg_k\right)+(mc)^2=0 \tag{4}$$

Действующие на частицу силы описываются метрическим тензором и векторным потенциалом - g_{ik}, A_i, которые отождествляются с метрическим тензором ОТО и векторным потенциалом электромагнитного поля соответственно /3-7/. Следовательно, уравнение (4) описывает движение классических заряженных частиц во внешнем электромагнитном и гравитационном поле.

Заметим, что в исходном уравнении (1) пятая координата ничем не выделена, а переход к уравнению (4) является возможным благодаря частному решению $\Sigma = mcx^5+S(x^1,x^2,x^3,x^4)$, которое никак не соотносится с гипотезой Клейна. Можно поэтому утверждать, что указанное частное решение соответствует принципиальной возможности совместного описания движения заряженных частиц в гравитационном и электромагнитном поле.

Другие частные решения связаны с иным представлением основных сил, которые описываются исходным метрическим тензором G_{ik}. Можно предположить, что метрический тензор g_{ik} при любом представлении исходного действия типа $\Sigma = mcx^5+S(x^1,x^2,x^3,x^4)$ описывает гравитацию в четырехмерном пространстве. Аналогичное утверждение касается и векторного потенциала. Не исключено, что при некотором представлении векторный потенциал можно будет отождествить со слабым или сильным взаимодействием.

Действительно, различие в описании электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий в современной теории сводится к утверждению, что каждое взаимодействие осуществляется посредством частиц векторных полей – фотонов, Z и W бозонов или глюонов соответственно /1/. С точки зрения динамической модели (4) эти различия сводятся только к переопределению заряда и векторного потенциала /11/. Назовем это утверждение правдоподобной гипотезой, которую предстоит проверить.

3. Метрический тензор в 5-мерном пространстве и классические поля

Выше не сделано никаких предположений о виде G_{ik}. Заметим, что этот тензор имеет физический смысл не только в связи с метрическим тензором ОТО и векторным потенциалом электромагнитного поля, согласно уравнениям (2), но и как метрический тензор пятимерной теории гравитации с источником в виде материальных полей /6, 10/.

Например, в работе /12/ был рассмотрен вариант пятимерной гравитации, с источником в виде нелинейного спинорного поля. В этом частном случае тензор G_{ik} имеет диагональную форму, а квадрат интервала задается в виде /12/

$$ds^2 = \phi^2(\rho)\left(e^{2\chi(\rho)}c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2\right) - d\rho^2 \tag{5}$$

Здесь ρ - пятая координата. В общем же случае тензор G_{ik} определяется как решение уравнений Эйнштейна в 5-мерном пространстве /6/. Поскольку ни источник, ни распределение материи в 5-мерном пространстве заранее неизвестны, можно лишь опираться на интуитивные представления о такого рода гравитации, рассматривая классические поля, как результат действия сил более высокой размерности /1/. В частности, можно предположить, что вблизи массивного центра гравитации метрический тензор в 5-мерном пространстве представляется в виде ряда по степеням расстояния до источника, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, следовательно

$$G_{ik} = G_{ik}(0) + \dot{G}_{ik}(0)kr + \ddot{G}_{ik}(0)\frac{(kr)^2}{2} + \ldots \tag{6}$$

Здесь параметром k задается масштаб области применения модели (6), а точкой обозначено дифференцирование по безразмерному параметру $\tilde{r} = kr$. Рассмотрим вид тензора (6), возникающего при удержании первых трех членов разложения для случая метрики в поле центральных сил с гравитационным потенциалом в форме Ньютона.

Положим $x^1 = ct, x^2 = x, x^3 = y, x^4 = z$, в этих обозначениях имеем для квадрата интервала в 4-мерном пространстве (см., например, /13/):

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + 2\varphi/c^2)c^2t^2 - (1 - 2\varphi/c^2)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \\ \varphi &= -\frac{\gamma M}{r} \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь γ - гравитационная постоянная, M – масса центрального тела. Предположим, что коэффициенты метрики в 5-мерном пространстве характеризуется некоторым параметром $\varepsilon^2 = G_{11}(0) = -\dot{G}_{11}(0)$. Тогда, полагая, что $\varepsilon^2 / k = 2\gamma M / c^2$, приходим к выражению интервала в зависимости от параметров метрики в 5-мерном пространстве:

$$ds^2 = (1 - \varepsilon^2 / kr)c^2 t^2 - (1 + \varepsilon^2 / kr)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{8}$$

Далее заметим, что в этом случае метрический тензор в четырехмерном пространстве является диагональным с компонентами

$$g_{11} = 1 - \varepsilon^2 / kr\,;\; g_{22} = g_{33} = g_{44} = -(1 + \varepsilon^2 / kr) \tag{9}$$

Зададим векторный потенциал источника, связанного с центром гравитации в виде

$$g_1 = \varepsilon / kr\,,\; \vec{\boldsymbol{g}} = g_1 \vec{\boldsymbol{\sigma}} \tag{10}$$

Здесь $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ – некоторый вектор, который определим ниже. Отсюда находим скалярный и векторный потенциал электромагнитного поля

$$\varphi_e = \frac{q}{r} = \frac{mc^2}{e} \frac{\varepsilon}{kr}\,,\quad \vec{\boldsymbol{A}} = \varphi_e \vec{\boldsymbol{\sigma}} \tag{10'}$$

Полагая $N = (kr)^2$ в первом выражении (2) и вычисляя метрический тензор в 5-мерном пространстве, с учетом (9)-(10), находим, что в этом случае выражение (6) содержит в правой части только три члена ряда разложения по степеням параметра $\tilde{r} = kr$

$$G_{ik} = \begin{pmatrix} Ng_{ik} + Ng_i g_k & Ng_k \\ Ng_i & N \end{pmatrix} = G_{ik}(0) + \dot{G}_{ik}(0)(kr) + \ddot{G}_{ik}(0)\frac{(kr)^2}{2} \tag{11}$$

Отметим, что нулевой член разложения (11), описывающий плоское пространство, зависит от наличия заряда, причем, в метрике (7) всякое массивное тело может иметь положительный или отрицательный электрический заряд $q = \pm mc\sqrt{2\gamma M / k} / e$. Поскольку же заряд квантуется, можно определить массу, порождающую электрон или протон, из соотношений: $q=e$, $M=m$, следовательно, $m^3 = ke^4 / 2c^2\gamma$. Отсюда находим выражение неизвестного параметра теории

$$k = 2\gamma m^3 c^2 / e^4 \tag{12}$$

Заметим, что это выражение соответствует закону Кулона в форме (11) в Гауссовой системе единиц. В системе СИ правую часть (12) следует умножить на $(4\pi\varepsilon_0)^2$, где ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума. Численное значение параметра (12), имеющего размерность обратной длины, составляет в случае электрона около $1{,}7\cdot 10^{-28}$ м$^{-1}$, а в случае протона приблизительно $1{,}05\cdot 10^{-18}$ м$^{-1}$. Интересно, что соответствующий масштаб в случае электрона превосходит размер наблюдаемой Вселенной, тогда как для протонов этот масштаб составляет около 100 световых лет.

Этот результат показывает, что для описания движения в четырехмерных мирах с учетом сил гравитации и электромагнетизма требуется лишь конечное число членов ряда (6) в разложении метрического тензора в 5-мерном пространстве.

Рассмотрим вопрос о нижнем пределе применимости развиваемой модели. Для этого сравним нулевой и второй члены разложения (6). Предполагая, что эти слагаемые имеют один порядок, $(kr)^2 \sim \varepsilon^2$ находим соответствующий минимальный радиус, $r_{min} \sim \varepsilon / k = e^2 / mc^2$, который в случае электрона совпадает с его классическим радиусом – таблица 1. На этом масштабе электростатическое поле существенно влияет на метрику 5-мерного пространства, как буде показано ниже. Отметим, что минимальный размер в случае протона совпадает с радиусом действия слабого взаимодействия.

Таблица 1. Параметры разложения метрического тензора G_{ik}

	k, 1/м	ε	r_{max}, м	r_{min}, м
e-	1,703163E-28	4,799488E-43	5,87E+27	2,81799E-15
p+	1,054395E-18	1,618178E-36	9,48E+17	1,5347E-18

Далее заметим, что учет эффектов, обусловленных вращением тел, не приводит к увеличению числа членов в разложении метрического тензора в 5-мерном пространстве в форме (6). Действительно, в метрике 4-мерного пространства вращающееся тело порождает гравитомагнитное поле, векторный потенциал которого определяется согласно /13, 14/

$$\mathbf{A}_g = \frac{2\gamma}{c^3}\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{L}}{r^3} \tag{13}$$

Здесь $\mathbf{L}$ - вектор механического момента вращения тела. В приближении, в котором справедливо выражение интервала (7), потенциал гравитомагнитного поля связан с компонентами метрического тензора соотношением $A_{g\alpha} = -g_{1\alpha}/g_{11} \approx -g_{1\alpha}$, где индекс *1* относится к временной координате. Но тогда из выражения (11) следует, что гравитомагнитное поле в пятимерном пространстве не зависит от расстояния до источника (но зависит от угла), поскольку $N g_{1\alpha} = -N A_{g\alpha} = \frac{-2\gamma k^2}{c^3}\frac{[\vec{r}\vec{L}]_\alpha}{r}$.

Векторный потенциал магнитного диполя описывается выражением, аналогичным (13), но дает вклад в метрический тензор в 5-мерном пространстве в виде комбинации $g_i g_k$, что могло бы приводить к появлению в правой части (6) слагаемых, пропорциональных $(kr)^{-2}$, как это следует из выражения (11). Тем самым аналитичность метрического тензора в окрестности начала координат могла бы нарушиться. Чтобы избежать этого, будем рассматривать векторный потенциал магнитного диполя как суперпозицию векторных потенциалов (10'), исключив тем самым слагаемые, пропорциональные $(kr)^{-2}$ из разложения метрического тензора (6). В свою очередь, чтобы векторный потенциал (10) приводил к появлению в разложении метрического тензора слагаемых только с нулевой степенью, достаточно наложить на вектор $\vec{\sigma}$ условие

$$\vec{\sigma} = \vec{u} + \frac{[\vec{r}\,\vec{s}]}{r} \tag{14}$$

Здесь $\vec{u}, \vec{s}$ - постоянные векторы. Из выражений (10') и (14) следует, что в рассматриваемом случае всякое массивное тело порождает не только гравитационное и гравитомагнитное поле, но и статическое электрическое и магнитное поле.

Электрический заряд нашей планеты, вычисленный согласно (10), составляет около $4{,}1 \cdot 10^8$ Кулон в случае электронов и $9{,}57 \cdot 10^6$ Кулон в случае протонов. Для планет-гигантов эти величины возрастают пропорционально корню квадратному из их массы, поскольку $q = \pm mc\sqrt{2\gamma M / k} / e$. Следовательно, небесные тела Солнечной системы обладают большими электрическими зарядами, что было установлено в работе /15/ на основе анализа вариаций магнитного поля Земли.

Таким образом, мы показали, что разложение метрического тензора G_{ik} в 5-мерном пространстве по степеням малого параметра kr в виде (6) с точностью до членов второго порядка равносильно описанию гравитационного поля тяготеющих масс в рамках ОТО с гравитационным потенциалом в форме Ньютона. Установлено, что всякое массивное тело порождает статическое гравитационное, электрическое и магнитное поле (элементарные частицы, обладающие массой покоя, но не обладающие зарядом, рассматриваются ниже). Отметим, что модель взаимосвязи магнитного поля с гравитацией массивных тел впервые предложил Эйнштейн в работе «Об эфире» (см. /5/, стр. 154) для описания магнитного поля Земли и Солнца.

Разумеется, что одних выражений (10') недостаточно для описания электромагнитного поля небесного тела. Векторный потенциал (10') можно рассматривать как постоянный источник, возбуждающий токи, как внутри самого тела, так и в окружающем его пространстве, чем объясняются, например, наблюдаемые вариации магнитного поля Земли /15/.

Рассмотрим вопрос о том, какое преобразование координат при повороте в плоскости времени и пятой координаты дает в результате коэффициенты тензора (11). Для этого используем общие уравнения с тремя параметрами, включающие растяжение осей, поворот на заданный угол и изменение взаимной ориентации осей, имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= kr\left(x_1'\cos\alpha + x_5'\sin(\alpha+\beta)\right) \\ x_5 &= kr\left(-x_1'\sin\alpha + x_5'\cos(\alpha+\beta)\right) \end{aligned} \tag{15}$$

Вычисляя интервал, находим

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_5^2 = (kr)^2((dx_1')^2 + (dx_5')^2 + 2\,dx_1'\,dx_5'\sin\beta) \qquad (16)$$

При $\beta = 0$ преобразование координат (15) сводится к растяжению и повороту, в этом случае коэффициент $G_{15} = G_{51} = 0$, следовательно, в такой системе электростатический потенциал равен нулю.

При $\alpha = 0$ преобразование (15) сводится к растяжению и изменению взаимной ориентации осей, т. е. к переходу от прямоугольной системы координат к косоугольной (аффинной) системе. В этом случае находим, что $G_{15} = G_{51} = \varepsilon(kr) = 2(kr)^2\sin\beta$. Следовательно, электростатическое поле возникает при таких деформациях пространства, при которых изменяется взаимная ориентация осей времени и пятой координаты. Полученное соотношение позволяет найти предельное значение электростатического потенциала в виде $\varepsilon = 2kr\sin\beta \le 2kr$, что с учетом первого уравнения (15) дает известное ограничение на потенциал

$$e\varphi_e \le 2m_e c^2 \qquad (17)$$

В квантовой электродинамике это ограничение связано с рождением пар частиц – электронов и позитронов, тогда как в данной теории оно является следствием геометрических соотношений в 5-мерном пространстве.

Наконец, заметим, что использованное выше соотношение $\varepsilon^2 = G_{11}(0) = -\dot{G}_{11}(0)$, выражающее связь заряда и массы, является следствием аналогичного соотношения, полученного в классической электродинамике для электрона $e^2/r_{min} = mc^2$. В общем же случае можно отказаться от этой связи, рассматривая метрику, зависящую и от массы, и от заряда.

4. Сильные и слабые взаимодействия

Тот факт, что электроны и протоны нельзя описать единым параметром, определяемым путем разложения метрики по степеням расстояния до источника в виде (6), означает, что мы имеем дело не с одним, а с двумя 4-мерными мирами, в одном из которых существуют протоны, а в другом – электроны. Взаимодействие этих частиц приводит к образованию атомных ядер и атомов, а также всех наблюдаемых феноменов. Для того, чтобы такое взаимодействие могло возникнуть, электрон и протон должны оказаться в одном четырехмерном пространстве, т. е. масштабы их движения должны быть согласованы. Наиболее просто такое согласование достигается на основе параметра разложения метрики, согласно уравнению (12).

Предположим, что протон движется в масштабе электрона. Тогда у протона, кроме электрического заряда, должен быть еще один заряд, который определяется из соотношения:

$$k_e = 2\gamma m_e^3 c^2 / e^4 = 2\gamma m_p^3 c^2 / e_s^4 \tag{18}$$

Отсюда находим искомый заряд

$$e_s / e = (m_p / m_e)^{3/4} \approx 280{,}5025559 \tag{19}$$

Его величина приблизительно в 2π раз больше, чем константа сильного взаимодействия нуклонов.

Аналогично, предполагая, что электрон движется в масштабе протона, находим слабый заряд электрона из соотношения

$$k_p = 2\gamma m_p{}^3 c^2 / e^4 = 2\gamma m_e{}^3 c^2 / e_w{}^4 \tag{20}$$

Следовательно, слабый заряд электрона приблизительно в 280,5 раза слабее, чем электрический заряд.

Хотя такое выравнивание масштабов является умозрительным, поскольку не указан реальный механизм этого явления, полученные в результате оценок (19)-(20) заряды и силы можно интерпретировать как сильные и слабые взаимодействия. Сам же механизм выравнивания масштабов можно показать на примере возникновения элементарных частиц, атомных ядер и атомов, используя приведенный выше формализм, связанный с разложением метрического тензора в виде (6). Как известно, в области атомных и ядерных масштабов справедливо уравнение Шредингера и его обобщения – нерелятивистское уравнение Паули или релятивистское уравнение Дирака, что связано с проявлением волновых свойств материи.

5. Волновое уравнение в 5-мерном пространстве и квантовая механика

Для описания движения материи с учетом ее волновых свойств, предположим, что уравнение 5-эйконала (1), как и аналогичное уравнение геометрической оптики, является следствием волнового уравнения в 5-мерном пространстве. Это уравнение в общем случае можно записать в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-G}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-G}G^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\Psi\right) = 0 \tag{21}$$

Здесь G - определитель метрического тензора $G_{\mu\nu}$, Ψ - волновая функция, описывающая, согласно (21), безмассовое скалярное поле в пятимерном пространстве.

Отметим, что в работе /12/ в правой части уравнения (21) фигурирует член, пропорциональный затравочной массе. Такое слагаемое в настоящей теории является излишним, так как скалярное поле приобретает массу в четырехмерном пространстве по механизму захвата материи, описанному в той же работе /12/. Действительно, в плоском пространстве в отсутствии внешних полей метрический тензор, согласно выражению (2), имеет вид диагональной матрицы с диагональю $(+1,-1,-1,-1,+1)$ и с определителем $G=-1$. В этом случае уравнение (21) существенно упрощается, в результате находим

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi+\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\psi=0 \qquad (22)$$

Рассмотрим решение уравнения (22), которое описывает скопление материи вблизи четырехмерной гиперповерхности в 5-мерном пространстве (аналогом такого скопления в трехмерном пространстве является стенка мыльного пузыря):

$$\Psi=\psi(t,x,y,z)\exp(-mc\rho/\hbar),\quad \rho=x_5>0 \qquad (23)$$

Подставляя выражение (23) в уравнение (22), получим окончательно

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2\right)\psi+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi=0 \qquad (24)$$

Таким образом, в случае плоского пространства и в отсутствии внешних полей уравнение (21) приводится в четырехмерном пространстве к виду уравнения Клейна-Гордона.

Уравнение (24) интересно тем, что из него, путем простого обобщения, можно вывести все основные модели квантовой механики /16/, включая уравнение Дирака, а в нерелятивистском случае это уравнение сводится к уравнению Шредингера.

Отметим, что если пятая координата является времени-подобной, то материя в форме безмассового скалярного поля может накапливаться вблизи гиперповерхности $x^5=0$. С другой стороны, в работе /12/ было показано, что в метрике (5) материя в форме скалярного поля также может накапливаться вблизи гиперповерхности $x^5=0$, хотя в этом случае пятая координата является пространственно-подобной.

Рассмотрим поведение решений уравнения (21) в исследованной выше метрике (11). Чтобы вычислить контравариантный тензор G^{ik}, используем общее выражение в форме /6/

$$G^{ik}=N^{-1}\begin{pmatrix} g^{ik} & -g^k \\ -g^i & 1+g^{ik}g_ig_k \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Вычисляя контравариантные компоненты четырехмерного метрического тензора и векторного потенциала, согласно (9), находим, что

$$g^{11}=a=(1-\varepsilon^2/kr)^{-1};\, g^{22}=g^{33}=g^{44}=b=-(1+\varepsilon^2/kr)^{-1}$$
$$g^1=ag_1=a\,\varepsilon/kr\,,\, g^2=bg_2\,,\, g^3=bg_3\,,\, g^4=bg_4 \qquad (26)$$

Отсюда, вычисляя контравариантный тензор G^{ik} по уравнению (25), получим

$$G^{ik}=N^{-1}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -g^1 \\ 0 & b & 0 & 0 & -g^2 \\ 0 & 0 & b & 0 & -g^3 \\ 0 & 0 & 0 & b & -g^4 \\ -g^1 & -g^2 & -g^3 & -g^4 & \lambda \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Здесь обозначено $\lambda=1+ag_1^2+b(g_2^2+g_3^2+g_4^2)$. Отметим, что контравариантные компоненты векторного потенциала и метрического тензора в 4-х и 5-мерном пространстве, пропорциональные параметру *a*, имеют особенность в точке $r=\varepsilon^2/k=2\gamma M/c^2$, что соответствует гравитационному радиусу. Определитель метрического тензора равен обратной величине определителя контравариантного тензора G^{ik} , который легко вычисляется для матрицы (27), имеем в результате (см. /7/)

$$G=N^5a^{-1}b^{-3} \qquad (28)$$

Далее заметим, что в исследуемой метрике, зависящей только от радиальной координаты, выполняется следующее соотношение

$$F^{\mu}=N\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(\sqrt{-G}\,G^{\mu\nu})=N\frac{\partial r}{\partial x^{\mu}}\frac{d}{dr}(\sqrt{-G}\,G^{\mu\nu}) \qquad (29)$$

С учетом выражений (27)-(29) запишем волновое уравнение (21) в виде

$$\frac{a}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}-|b|\nabla^2\Psi+\lambda\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2}-2g^i\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^i\partial\rho}+F^{\mu}\frac{\partial\Psi}{\partial x^{\mu}}=0 \qquad (30)$$

Отметим, что, согласно (28)-(29), последнее слагаемое в уравнении (30) имеет порядок $N^2k=k^5r^4\ll 1$. Следовательно, это слагаемое можно отбросить в задачах, характерный масштаб которых значительно меньше, чем максимальный масштаб из таблицы 1.

6. Спектр масс частиц

Рассмотрим задачу о движении материи вблизи гиперповерхности $\rho=0$. В процессе решения этой задачи необходимо задать инерционную массу. Если инерционная масса и гравитационная масса связаны между собой, как предполагается в ОТО, то это позволяет замкнуть задачу и определить возможный набор масштабов, т. е. спектр масс, используя уравнение (12). Поскольку уравнение (30) является линейным и однородным, такую задачу можно решить в общем случае.

Действительно, положим в уравнении (30)

$$\Psi=\psi(x,y,z)\exp(-mc^2\Lambda t/\hbar-mc\rho/\hbar) \tag{31}$$

Это решение описывает короткоживущие частицы, возникающие в нашем мире. Разделяя переменные, находим, что пространственное распределение материи описывается следующим уравнением (здесь отброшено, в силу его малости, слагаемое, содержащее вектор (29)):

$$b\nabla^2\psi+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left(-2\Lambda a g_1+a\Lambda^2+\lambda\right)\psi+2\frac{mc}{\hbar}b(\vec{g}\cdot\nabla)\psi=0 \tag{32}$$

В результате анализа уравнения (32), можно выделить два масштаба:

$$k=\gamma m^3/\hbar^2,\quad M_P=\sqrt{\hbar c/\gamma} \tag{33}$$

Первый масштаб (обратной длины) является аналогичным тому, что дается формулой (12), а второй называется массой Планка. Эта масса возникает в теории Клейна /4/ как предельный масштаб, на котором проявляется пятое измерение.

Наряду с уравнением (32) рассмотрим укороченное уравнение, в котором положим $(\vec{g}\cdot\nabla)\psi=0$. Кроме того, будем считать, что характерный масштаб пространственного распределения материи значительно превосходит гравитационный радиус, $r>>\varepsilon^2/k=2\gamma M/c^2$. Тогда в первом приближении можно положить, что $a\approx-b\approx1,\lambda=1+g_1^2-(g_2^2+g_3^2+g_4^2)$.

В этих предположениях уравнение (32) сводится к аналогичному уравнению, возникающему в задаче о движении электрона в кулоновском поле, т. е. к задаче о строении атома водорода

$$\nabla^2\psi+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left(2\Lambda\frac{\varepsilon}{kr}-\Lambda^2-\lambda\right)\psi=0 \tag{34}$$

Далее предположим, что $\lambda=1$. Согласно (10), это выполняется точно в том случае, если $\boldsymbol{\sigma}^2=1$.Обозначим $E=-mc^2(\Lambda^2+1)/2,\alpha_0=mc^2\Lambda\varepsilon/k$, и представим решение уравнения (34) в сферической системе координат в виде произведения радиальных и сферических функций

$$\psi_{klm}=R_{kl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{35}$$

Подставляя выражение (35) в уравнение (34) и разделяя переменные, получим для радиальной функции уравнение, хорошо известное в квантовой теории атома водорода (см. /17/):

$$\frac{d^2R_{kl}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_{kl}}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{\alpha_0}{r}\right)R_{kl}=0 \tag{36}$$

Приведем формулу квантования, которая связывает параметры задачи в случае действительных значений параметра Λ при указанных выше ограничениях

$$E_n = -mc^2(\Lambda^2+1)/2 = \frac{-m\alpha_0^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad n=1,2,3,... \tag{37}$$

Подставляя в правую часть этого выражения параметры задачи, находим фундаментальный масштаб из уравнения

$$k_n = \frac{2\gamma m^3}{\hbar^2 n^2}\frac{\Lambda^2}{1+\Lambda^2}, \quad n=1,2,3,... \tag{38}$$

Указанный выше масштаб (33) може быть получен из (38) при условии, что $n=1, \Lambda=1$. Таким образом, учет волновых свойств материи приводит к появлению новых фундаментальных масштабов, что позволяет в случае протонов расширить область применения разложения метрического тензора в форме (6) со 100 световых лет до приблизительно 10^6 световых лет.

Уравнение (30) имеет одно интересное следствие, весьма существенное для исторических событий, происходящих на нашей планете. Рассмотрим решения этого уравнения, которые не зависят от пространственных координат. Все такие решения описываются уравнением

$$\frac{a}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \lambda\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho^2} - \frac{2g^1}{c}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\rho\,\partial t} \tag{39}$$

Решение задачи Дирихле для уравнения (39) при условии $g^1=0$ позволяет определить влияние суммарного гравитационного потенциала небесных тел на исторические события, расположенные в некоторой замкнутой области (круге) на плоскости (t,ρ) .

Используя функцию Жуковского $W=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right), \zeta=ict+\rho$, можно отобразить внутренность круга на всю плоскость с разрезом от -1 до +1 вдоль оси времени. Это будет образ события каким оно видится в любой момент времени. Следовательно, волновая функция, если она существует для планеты в целом, позволяет сохранять образ любого события и делает его доступным для наблюдателей в любой момент времени. Это не означает, что посредством наблюдения можно изменить сам ход событий, однако знание хода событий в будущем должно приводить к установлению такого хода событий, который не меняется при любом наблюдении.

Оценим влияние статического электрического и магнитного поля на свойство эллиптичности уравнения (39). Эллиптичность указанного уравнения сохраняется при условии

$$a\lambda-(g^1)^2>0 \tag{40}$$

Свойство эллиптичности означает, что решение уравнения (39) является аналитической функцией, зависящей от комплексной переменной $\zeta=ict+\rho$.

В области гиперболичности уравнение (39) имеет две характеристики, $\zeta_{1,2}=\Lambda_{1,2}ct+\rho$. Полагая в уравнении (39) $\Psi=\Psi(\zeta_{1,2})$, находим, что на этих решениях должно быть

$$a\Lambda_{1,2}^2-2g^1\Lambda_{1,2}+\lambda=0 \tag{41}$$

Разрешая квадратное уравнение (41), получим окончательно

$$\Lambda_{1,2}=\frac{1}{a}\left(g^1\pm\sqrt{(g^1)^2-\lambda a}\right) \tag{42}$$

Отсюда в случае плоской метрики, т. е. при $a=-b=1$, а также учитывая, что $\lambda=1+ag_1^2+b(g_2^2+g_3^2+g_4^2)$, находим

$$\Lambda_{1,2}=g_1\pm\sqrt{(g_1\vec{\sigma})^2-1} \tag{43}$$

Отметим, что условие гиперболичности уравнения (39) вытекает из условия положительной определенности подкоренного выражения в правой части (42), которое сводится к неравенству

$$a\lambda\leq(g^1)^2 . \tag{44}$$

В частном случае плоской метрики неравенство (44) приводится к виду $(e\vec{A}/mc^2)^2\geq1$, что соответствует условию рождения частиц. Это неравенство можно сравнить с аналогичным неравенством (17), полученным из геометрических соотношений.

Чтобы выяснить, как происходит выравнивание масштабов движения электронов и протонов, сравним параметр $k_e = 2\gamma m_e^3c^2/e^4$ и тот, что задается уравнением (38). В результате находим массу частицы, которая обеспечивает выравнивание масштабов, из условия $k_e=k_n$:

$$m_n/m_e=\left(\frac{\hbar c n}{e^2}\right)^{2/3}(1+1/\Lambda^2)^{1/3} \tag{45}$$

Очевидно, что решение типа (31) соответствует области гиперболичности уравнения (39), поэтому фигурирующий в них параметр связан с характеристиками уравнения (39). В области гиперболичности имеется две характеристики, параметр которых на нижней границе неравенств (44) и на верхней границе неравенства (17) принимает значения $\Lambda_0 = 1, \Lambda_{1,2} = 2\pm\sqrt{3}$ соответственно. Для этих значений спектр масс частиц приведен в таблице 2.

Заменяя в левой части уравнения (40) массу электрона на массу протона, находим спектр частиц, обеспечивающих согласование масштабов движения электрона и протона (слабые взаимодействия в таблице 2):

$$m_n/m_p=\left(\frac{\hbar c\, n}{e^2}\right)^{2/3}\left(1+1/\Lambda^2\right)^{1/3} \tag{46}$$

Таблица 2. Спектр масс частиц (Мэв), обеспечивающих согласование масштабов движения протона и электрона с случае сильных и слабых взаимодействий.

Сильные взаимодействия				Слабые взаимодействия			
n	Λ0	Λ1	Λ2	n	Λ0	Λ2	Λ3
1	17,412794	14,701014	22,803235	1	31421,893	26993,319	41870,242
2	27,641087	23,336405	36,19788	2	49879,146	42849,224	66464,867
3	36,220071	30,579341	47,432641	3	65360,171	56148,367	87093,614
4	43,877491	37,044233	57,460552	4	79178,208	68018,903	105506,4
5	50,915318	42,986025	66,677064	5	91878,172	78928,945	122429,33
6	57,495779	48,541678	75,294624	6	103752,8	89129,977	138252,49
7	63,718736	53,795504	83,444009	7	114982,31	98776,808	153216
8	69,651176	58,804055	91,212941	8	125687,57	107973,28	167481
9	75,340783	63,607592	98,663869	9	135954,63	116793,31	181162
10	80,82303	68,236061	105,84324	10	145847,51	125291,89	194344,45
11	86,125201	72,7125	112,7868	11	155415,43	133511,32	207093,88
12	91,268859	77,055111	119,52276	12	164697,31	141485	219462,16
13	96,271416	81,278595	126,07395	13	173724,57	149240	231491,14
14	101,14719	85,395039	132,45911	14	182523	156798,41	243215,27
15	105,90813	89,414535	138,69388	15	191114,3	164178,82	254663,27
16	110,56435	93,345619	144,79152	16	199516,58	171396,89	265859,47
17	115,1245	97,195591	150,76334	17	207745,5	178466	276824,65
18	119,59604	100,97076	156,61913	18	215814,53	185397,82	287576,78
19	123,98549	104,67662	162,36741	19	223735,42	192202,35	298131,51
20	128,29856	108,318	168,01567	20	231518,49	198888,48	308502,58
21	132,54031	111,89916	173,57053	21	239172,85	205464	318702,16
22	136,71523	115,4239	179,03788	22	246706,62	211936	328741
23	140,82735	118,89562	184,42298	23	254127,05	218310,61	338628,91
24	144,88028	122,31736	189,73056	24	261440,68	224593,47	348374,46
25	148,87729	125,6919	194,96492	25	268653,4	230789,63	357985,54
26	152,82135	129,02173	200,12992	26	275770,56	236903,71	367469,28
27	156,71514	132,30912	205,22912	27	282797	242939,87	376832,18
28	160,56115	135,55617	210,26573	28	289737,27	248902	386080,17
29	164,36164	138,76479	215,24272	29	296595,35	254793,47	395218,69
30	168,11868	141,93673	220,16282	30	303375	260617,63	404252,75

Можно отметить, что частицы, обеспечивающие слабые взаимодействия, заметно массивнее, чем те, что обеспечивают сильные взаимодействия. Таблицу 2 можно продолжить, включив в нее частицы со сколь угодно большой массой. Цветом выделены значения близкие к массам мю- и пи-мезонов и векторных бозонов. Эту модель можно усложнить, включив в нее возбуждения с ненулевым орбитальным моментом и спином, а также магнитное взаимодействие, согласно уравнению (32).

Полученные спектры масс частиц (45)-(46) обладают следующим свойством: если в правой части выражения (46) сделать замену электрического заряда на сильный заряд, то в результате получим спектр масс частиц сильного взаимодействия (45), поскольку, $e_s^2 = e^2(m_p/m_e)^{3/2}$, согласно выражению (19); если же в правой части выражения (45) заменить электрический заряд на слабый заряд, согласно (20), то получим спектр масс частиц слабого взаимодействия (46). В конечном состоянии все частицы распадаются на электрон, протон и безмассовое поле.

Таким образом, мы доказали сформулированную выше гипотезу, что различие в описании электромагнитных, слабых и сильных взаимодействий сводятся только к переопределению заряда и векторного потенциала /11/, а также установили в форме уравнения (38) связь гравитации с другими видами взаимодействий.

7. Комплексное время и рождение частиц

Далеко не все частицы из таблицы 2 можно обнаружить в земных экспериментах. Действительно, все эти частицы являются нестабильными, причем они распадаются за короткое время, соизмеримое с периодом собственных колебаний $\tau \sim \hbar/mc^2$. Чтобы обнаружить эти частицы на земле, надо создать условия для их регистрации.

Предположим, что наш 4-мерный мир соответствует сечению $\rho=0$. Тогда зарегистрированы могут быть лишь те частицы, которые накапливаются вблизи этой гиперповерхности в специально созданных для их регистрации условиях. Согласно же выражению метрического тензора (27), прибор изменяет метрику пространства, главным образом, через искусственно созданные электромагнитные поля. Поэтому коэффициенты уравнения (30) приобретают новые значения, которые позволяют недолговечным частицам существовать достаточно долго в искусственных условиях.

Основным процессом, позволяющим частицам высвобождаться на короткое время жизни, является соударение с другой частицей. В силу законов сохранения механических величин - энергии, импульса и момента, мишень покидают лишь вполне определенные частицы из таблицы 2 , параметры которых удовлетворяют законам сохранения. Сам процесс соударения происходит за короткое время, которое определяется величиной энергии взаимодействия $\tau \sim \hbar/E_i$. Можно предположить, что при этом возбуждаются частицы с массой, порядка энергии соударения.

Волновое уравнение (30) описывает зарождение частиц путем возбуждения колебаний поля в окрестности центра гравитации. Такие частицы могут покинуть центр гравитации, если, например, внезапно удаляется сам центр при соударении с другой частицей. При этом колебания поля становятся свободными, а их распространение описывается уравнением типа (24). Но до того, как стать свободными, частицы проходят через зону трансформации, в которой изменяется метрика, что приводит к изменению типа уравнения (39) с гиперболического на эллиптический.

Свойство эллиптичности означает, что вместо решений вида (31) возникают решения, зависящие от комплексной переменной $\zeta = ict + \rho$, которую можно интерпретировать как комплексное время. Хорошо известно, что обобщение классической динамики с учетом движения вдоль пятой координаты может быть связано с введением комплексного времени. Отметим, что в теории динамических систем комплексное время используется в исследованиях, начиная с работ Софьи Ковалевской, посвященных решению задачи Эйлера-Пуансо о движении твердого тела типа трехосного эллипсоида /18-19/.

В задачах, рассмотренных выше, переход в комплексную плоскость времени означает, что наряду с решениями (31), можно искать решения уравнения (30) типа

$$\Psi = \psi(x, y, z)\exp(-imc^2 \Lambda t/\hbar - mc\,\rho/\hbar) \tag{47}$$

Подставляя выражение (47) в уравнение (30), находим в том же приближении, в котором получено уравнение (32),

$$b\nabla^2\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\left(-2i\Lambda a g_1 - a\Lambda^2 + \lambda\right)\psi + 2\frac{mc}{\hbar}b(\vec{\boldsymbol{g}}\cdot\nabla)\psi = 0 \tag{48}$$

Отметим, что уравнение (48) уже не может быть сведено к аналогичному уравнению, возникающему в квантовой теории строения атома водорода, поскольку эффективный потенциал, фигурирующий в этом уравнении, является мнимым.

В этом случае параметр Λ также является комплексным числом, которое можно определить из выражения (43), имеем

$$\Lambda_{1,2} = g_1 \pm i\sqrt{1-(g_1\vec{\boldsymbol{\sigma}})^2} \tag{49}$$

Положим $(g_1\vec{\boldsymbol{\sigma}})^2 = 1-\Gamma^2$, отсюда $\Lambda_{1,2} \approx g_1 \pm i\,\Gamma$, и решение (47) принимает вид

$$\Psi = \psi(x, y, z)\exp(-iEt/\hbar - mc\,\rho/\hbar)\exp(-mc^2\,\Gamma\, t/\hbar) \tag{50}$$

Здесь $E = g_1 mc^2$ - энергия частицы. |Таким образом, в общем случае, зная оценку величины потенциала, можно оценить энергию, которую приобретают частицы при соударении.

Практически для всех известных элементарных частиц параметр затухания, связанный со временем жизни, является малой величиной, $\Gamma \ll 1$. Следовательно, можно предположить, что наблюдаемые элементарные частицы возникают, главным образом, при возбуждении границы, на которой изменяется тип уравнения (39). Эти частицы в таблице 2 соответствуют колонкам с $\Lambda = \Lambda_0$. Частицы с $\Lambda = \Lambda_{1,2}$, возникающие при возбуждении внутренней границы, на которой выполняется соотношение (17), не могут быть зарегистрированы из-за малого времени жизни.

Возникает вопрос, какими свойствами обладают частицы, перечисленные в таблице 2? Исходная гипотеза, использованная при выводе волнового уравнения (30), заключается в том, что существует массивный центр гравитации, обладающий зарядом, вокруг которого в пятимерном пространстве формируется волновое поле Ψ . Исходное поля является нейтральным и безмассовым, но в процессе взаимодействия с центром гравитации приобретает отрицательную энергию, массу и заряд, которые связаны условием квантования (37). Эти состояния неустойчивы, а соответствующие частицы можно назвать виртуальными.

В теории предполагается, что любой заряд и масса связаны между собой через метрические коэффициенты. Используя эту связь можно записать условие квантования (37) в форме уравнения (38) для неизвестного параметра разложения метрики, которое не содержит заряда. Наконец, предполагая, что параметр разложения метрики для данной частицы совпадает с параметром разложения метрики для электрона, приходим к уравнению (45), описывающему спектр масс частиц, обладающих электрическим зарядом. Но тоже самое уравнение (45) получается и в том случае, если вместо электрического заряда использовать сильный заряд, определяемый из уравнения (19), а вместо массы электрона — массу протона.

Следовательно, уравнение (45) описывает спектр масс лептонов и частиц, участвующих в сильных взаимодействиях. Свойства таких частиц хорошо известны. Они могут обладать электрически зарядом, как протон, но могут быть и нейтральными, как, например, нейтрон.

Частицы с массой порядка массы протона и нейтрона, принимающие участие в сильном взаимодействии, соответствуют решениям уравнения (40) при n=396 в колонке Λ_0 , при n=511 в колонке Λ_1 , и при n=264 в колонке Λ_2 . Отметим, что в данной модели нейтрон выступает просто как одна из многочисленных частиц, обеспечивающих согласование метрики двух пространств.

Аналогично выводится уравнение (46), описывающее спектр масс частиц, обеспечивающих слабые взаимодействия. Это уравнение также обладает свойством инвариантности относительно замены массы протона на массу электрона и, одновременно, электрического заряда на слабый заряд. Свойства этих частиц хорошо известны. Они могут иметь электрический заряд как, например, $W^{\pm}$ векторные бозоны, но могут быть и нейтральными, как Z^0 бозон. Следовательно, в основу классификации частиц, возникающих при возбуждении волнового поля Ψ, могут быть положены известные свойства элементарных частиц. Однако создание подробной классификации элементарных частиц выходит за рамки настоящей работы.

Очевидно, что можно рассматривать шесть основных состояний с $n=1$ из таблицы 2, как некие кирпичики мироздания - «кварки». Тогда проблема не вылетания кварков (конфайнмент), которую в современной квантовой теории связывают с поведением полей Янга-Милса /20/, получает простое объяснение, приведенное выше.

8. Заключение

В настоящей работе путем разложения метрического тензора в 5-мерном пространстве построена метрика, в которой пятая координата является времени-подобной. В результате исследования метрики 5-мерного пространства получены следующие результаты:

1) показано, что существует метрический тензор в 5-мерном пространстве, который является стационарным, не имеет особых точек, описывает в 4-х мерном пространстве статическое поле отличной от нуля массы и ненулевого заряда;
2) установлено, что в теории Калуцы-Клейна заряд и масса имеют метрическое происхождение, поэтому всякое массивное тело в общем случае может обладать электрическим зарядом и магнитным полем, что обусловлено метрикой 5-мерного пространства;
3) из 5-мерного волнового уравнения и разложения метрического тензора в 5-мерном пространстве выводится модель, позволяющая построить спектр масс частиц, обеспечивающих сильные и слабые взаимодействия;
4) показано, что в теории Калуцы-Клейна существуют заряженные и нейтральные массивные частицы – электрон, протон, нейтрон;
5) установлена взаимосвязь гравитационного взаимодействия с сильными, слабыми и электромагнитными взаимодействиями;
6) обоснована гипотеза о том, что в рамках теории Калуцы-Клейна можно единым образом описать электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия.

Ссылки

1. П. Дэвис. Суперсила. – М.: Мир, 1989.
2. Альберт Эйнштейн. Играют ли гравитационные поля существенную роль в построении элементарных частиц?/ Собрание научных трудов в четырех томах. Т.1. – М., Наука, 1965.
3. Kaluza, Theodor. Zum Unitätsproblem in der Physik. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. *Berlin. (Math. Phys.)* **1921**: 966–972.
4. Klein, Oskar. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. Zeitschrift für Physik a Hadrons and Nuclei **37** (12): 895–906, 1926. doi:10.1007/BF01397481.
5. A. Einstein, P. Bergmann. Generalization of Kaluza's Theory of Electricity// Ann. Math., ser. 2, 1938, 39, 683-701 (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966)
6. Ю. Б. Румер. Исследования по 5-оптике. – М., Гостехиздат,1956. 152 с.
7. Альберт Эйнштейн. К теории связи гравитации и электричества Калуцы II. (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966)
8. Альберт Эйнштейн, В. Баргман, П. Бергман. О пятимерном представлении гравитации и электричества (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966 статья 121).
9. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, статья 122.
10. Einstein A., Pau1i W.— Ann of Phys., 1943, v. 44, p. 131. (см. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 2. – М., Наука, 1966, статья 123).
11. Chodos A. Kaluza — Klein Theories: Overview.— Comm. Nucl. and Part.Phys. (Comm. Mod. Phys. Pt. A), 1984, v. 13, No. . 171—181.
12. Vladimir Dzhunushaliev and Vladimir Folomeev. Thick brane solutions supported by two spinor fields/arXiv:1104.2733v1 [gr-qc] 14 Apr 2011.
13. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.2. Теория поля. – 7 изд. – М.: Наука. - 1988. - 512 с.
14. M. L. Ruggiero, A. Tartaglia. Gravitomagnetic effects// Nuovo Cim. 117B (2002) 743—768, http://arxiv.org/abs/gr-qc/0207065
15. Трунев А. П. Моделирование электромагнитного и гравитационного влияния небесных тел солнечной системы на смещение географического полюса и магнитное поле Земли// Научный журнал КубГАУ [Электронный ресурс]. – Краснодар: КубГАУ, 2010. – №07(61). – Режим доступа: http://ej.kubagro.ru/2010/07/pdf/16.pdf
16. W. Heisenberg. Introduction to the unified field theory of elementary particles. – Interscience Publishers, London-NY-Sydney, 1966.
17. Ландау Л. Д, Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т.3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). – 4-е изд. – М.: Наука. - 1988. - 768 с.
18. Ковалевская С. В. Научные работы — М.: Издательство АН СССР, 1948.
19. В. И. Арнольд. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике//УМН, 1963, 18:6(114), 91–192.
20. ARTHUR JAFFE AND EDWARD WITTEN. QUANTUM YANG–MILLS THEORY/ http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/yangmills.pdf